

# Linearna jednadžba

## 2.

### Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- riješiti jednostavne linearne jednadžbe i nejednadžbe
- izračunati vrijednost omjera te odrediti koeficijent proporcionalnosti
- izračunati postotni iznos, postotak i osnovnu vrijednost
- riješiti jednostavan sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznicama.

### Oni koji žele znati više moći će:

- riješiti složenije probleme prvog stupnja
- prikazati rješenje nejednadžbe s pomoću intervala.

## 2.1. Linearne jednađzbe s jednom nepoznanicom

Ako se jednađzba elementarnim računom svede na oblik:

$$ax = b, \quad a \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

nazivamo je **linearna jednađzba** s jednom nepoznanicom. Pod elementarnim računom podrazumijevamo množenje jednađzbe brojem različitim od nule, dodavanje realnog broja objema stranama jednađzbe, sređivanje dobivenih izraza pri čemu poštujemo slijed operacija.

**Riješiti** linearnu jednađzbu znači naći realan broj koji uvršten umjesto nepoznanice  $x$  u jednađzbu daje jednakost. Broj koji uvršten u jednađzbu daje jednakost zovemo **rješenje** jednađzbe.

### Primjer 1.

Riješimo jednađzbu  $5x - 20 = 0$ .

$$\begin{aligned} 5x - 20 = 0 & / + 20 & 5x = 20 & / : 5 \\ 5x - 20 + 20 = 20 & & x = 4. & \end{aligned}$$

Provjerimo je li 4 rješenje jednađzbe. Uvrstimo broj 4 u jednađzbu:

$$5 \cdot 4 - 20 = 0, \quad 20 - 20 = 0, \quad 0 = 0.$$

Dobili smo jednakost  $0 = 0$ , pa 4 jest rješenje jednađzbe.

Općenito, rješenje linearne jednađzbe  $ax = b$ ,  $a \neq 0$ , je  $x = \frac{b}{a}$ , jer uvrštavanjem broja  $\frac{b}{a}$  u jednađzbu dobivamo  $a \cdot \frac{b}{a} = b$ , dakle  $b = b$ , tj. dobili smo jednakost.

### Primjer 2.

Riješimo jednađzbu  $3x - \frac{x+7}{5} = 7$ .

Pomnožimo li jednađzbu  $3x - \frac{x+7}{5} = 7$  s 5, dobivamo:

$$\begin{aligned} 15x - (x+7) &= 35 & 14x &= 42 & / : 14 \\ 15x - x - 7 &= 35 & x &= 3. \\ 15x - x &= 35 + 7 \end{aligned}$$

Uočimo postupak rješavanja jednađbe iz prethodnog primjera. Postupak se može primijeniti općenito:

1. Ako u jednađbi imamo razlomke, prvo se rješavamo nazivnika množenjem **svakog člana** u jednađbi zajedničkim nazivnikom.
2. Zatim obavimo naznačene operacije poštujući njihov slijed.
3. Nepoznanice posložimo lijevo, a poznate veličine desno u odnosu na znak jednakosti te izvedemo zbrajanje.
4. Podijelimo jednađbu s brojem uz nepoznaticu.

### Primjer 3.

Iz formule za put kod jednoliko ubrzanog gibanja  $s = \frac{at^2}{2}$  izrazimo  $a$ , a zatim  $t$ .

Vrijedi:

$$s = \frac{at^2}{2} / \cdot 2$$

$$2s = at^2$$

Izrazimo  $a$ :

$$at^2 = 2s / : t^2$$

$$a = \frac{2s}{t^2}$$

Izrazimo  $t$ :

$$at^2 = 2s / : a$$

$$t^2 = \frac{2s}{a}$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

Često se problemi iz svakodnevnog života daju prevesti na matematički jezik, tj. može se oblikovati jednađba, a ako je to linearna jednađba s jednom nepoznaticom, znamo je i riješiti.

Riješimo problemske zadatke.

### Primjer 4.

Tiskara je prvi dan tiskala određenu količinu kalendara. Drugi je dan zbog kvara na stroju tiskala tri puta manje, ali je treći dan tiskala 20 000 kalendara više nego prvi dan. Koliko je kalendara tiskano prvi dan ako je u ta tri dana otisnuto ukupno 83 000 kalendara?



Ovo je primjer matematičkog problema prvog stupnja.

Uvedimo za količinu kalendara tiskanih prvi dan oznaku  $x$ .

Tada iz druge rečenice sledi da je drugi dan tiskano  $\frac{1}{3}x$  kalendara, a treći dan  $x + 20\,000$ .  
Iz zadnje rečenice dobivamo

$$x + \frac{1}{3}x + (x + 20\,000) = 83\,000.$$

Rješavanjem ove linearne jednačbe dobivamo

$$\frac{7}{3}x + 20\,000 = 83\,000, \quad \frac{7}{3}x = 63\,000, \quad x = 27\,000.$$

Prvi je dan tiskano 27 000 kalendara.

## ZADATCI 2.1.

**1.** Riješi linearne jednačbe:

a)  $x + 12 = 7$

b)  $x - 12 = 22$

c)  $18 - x = 38$

d)  $3x = 2$

e)  $8x = 171$

f)  $32x - 45 = 120$ .

**2.** Riješi jednačbe:

a)  $3x + 7 = 2x - 11$

b)  $11 - 7x = 19x + 2$

c)  $5(2x + 12) = 3(x - 2) + 1$

d)  $8(x - 1) = 13(x + 3)$

e)  $8(2 - x) - x = 5(x + 2)$

f)  $12 - 5(3x + 4) = 14 - (x + 7)$

g)  $0.1x - (x - 2.9) = 2x$

h)  $1.5(x - 1) = 2.5(x + 2)$

i)  $2.4(0.5 - 2x) = -2x$ .

**3.** Riješi jednačbe:

a)  $\frac{x}{3} - 1 = \frac{x}{2}$

b)  $3x - \frac{2-x}{5} = 2$

c)  $4 - \frac{2x-5}{3} = 5x$

d)  $\frac{2}{3}(x-7) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}x$

e)  $\frac{1}{5}(2x+3) - \frac{1}{10}(x+4) = \frac{1}{2}$

f)  $\frac{x-2}{4} - \frac{2x-3}{3} = 1$

g)  $\frac{x+1}{2} + \frac{2x-1}{3} = 4$

h)  $\frac{2x-11}{3} - \frac{x-1}{9} = 2$

i)  $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-1}{2} = \frac{-x-2}{2}$ .

**4.** Riješi jednačbe:

a)  $\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}x - 1 \right) - 1 \right] - 1 = 0$

b)  $\frac{1}{2} - \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - x \right) \right] = 2x$

c)  $\frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{3}{4}x + 2 \right) - 3 \right] + 4 = 5$

d)  $3 \left\{ 2x - 4 \left[ x + 5(x - 3) + 1 \right] \right\} = -2$ .

**5.** Riješi jednačbe:

a)  $\frac{3x+8}{2x-1} = 3$

b)  $\frac{8x+2}{4x-7} = 1$

c)  $\frac{14x-1}{8x+10} = 2$

d)  $\frac{11x-1}{12x-1} = \frac{1}{2}$ .

**6.** Iz zadanih izraza izrazi  $c$ :

a)  $a = 2b + c$

b)  $x - 1 = 4c - 7$

c)  $m = \frac{1}{c} + n$

d)  $\frac{a}{c} = b + 1$ .



- 20.** Marija, Katarina i Ivona potrošile su u trgovini 320 eura. Marija je potrošila 15 € više od Ivone, a 3 puta manje od ukupne sume koju su potrošile Katarina i Ivona. Koliko je potrošila svaka od djevojaka?
- 21.** Tri osobe podijelile su 4400 €. Prva je dobila 120 € manje od druge, a treća koliko prva i druga zajedno. Koliko je eura dobila svaka osoba?
- 22.** Ivica i Marica imaju zajedno 816 €. Kad bi Ivica potrošio  $\frac{3}{5}$  svog dijela, a Marica  $\frac{3}{7}$  svog dijela, ostale bi im jednake svote novca. Koliko novca ima Ivica, a koliko Marica?
- 23.** Stjepan je za 5 cm viši od Josipa, koji je 12 cm niži od Domagoja. Odredi visinu svakog ako su sva trojica ukupno visoka 581 cm.

## 2.2. Postotni račun

Postotak je povezan sa zapisom broja u obliku razlomka s nazivnikom 100. Tako je:

$$2\% = \frac{2}{100} = 0.02, \quad 43.5\% = \frac{43.5}{100} = 0.435, \quad 200\% = \frac{200}{100} = 2.$$

1 % nekog broja je  $\frac{1}{100}$  tog broja. Lako računamo 10 % od broja ili 50 % od broja. Naime, ako je 1 % broja jednako  $\frac{1}{100}$  broja, onda je 10 % broja jednako  $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$  broja, a 50 % broja jednako je  $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$  broja.

Kad računamo  $p\%$  nekog broja  $x$ , rješavamo problem pronalaženja  $\frac{p}{100}$  od  $x$  što se svodi na množenje  $\frac{p}{100} \cdot x$ . Taj umnožak naziva se **postotni iznos** (oznaka  $y$ ) i vrijedi:

$$y = \frac{p}{100}x \quad \text{ili} \quad y = p\% \cdot x.$$

Broj  $x$  naziva se **osnovna vrijednost** ili glavnica ili svota.

### Primjer 1.

Izračunajmo 23 % od 145.

$$y = \frac{p}{100}x, \quad y = \frac{23}{100} \cdot 145 = 33.35.$$

Ako poznamo postotni iznos  $y$  i osnovnu vrijednost  $x$ , tada iz formule izrazimo  $p$  i dobivamo:

$$p = \frac{100y}{x} \quad \text{ili} \quad p\% = \frac{y}{x}.$$

**Primjer 2.**

U dječjem bazenu nalazi se 2500 raznobojnih loptica od kojih je 200 plavih. Koliki je postotak plavih loptica?

$$p = \frac{100y}{x}, \quad p = \frac{100 \cdot 200}{2500}, \quad p = 8\%.$$

U bazenu je 8 % plavih loptica.



Osnovna se vrijednost  $x$  iz formule postotnog računa dobiva kao:

$$x = \frac{100y}{p} \quad \text{ili} \quad x = \frac{y}{p\%}.$$

**Primjer 3.**

Jutros je 31.25 % učenika jednog razreda, tj. njih 10 popilo čaj. Koliko je učenika u tom razredu?

$$x = \frac{100 \cdot 10}{31.25}, \quad x = 32. \quad \text{U razredu su 32 učenika.}$$

**Primjer 4.**

Prodajna cijena para cipela je 102.50 €. Kolika je osnovna cijena tog para cipela ako se prodajna cijena izračunava tako da se osnovnoj cijeni doda PDV koji iznosi 25 % osnovne cijene?

Označimo s  $O$  osnovnu cijenu.

Tada je prodajna cijena jednaka  $O + 25\%O$ , tj.

$$O + \frac{25}{100}O = 102.50, \quad \frac{125}{100}O = 102.50$$

$$O = \frac{102.50 \cdot 100}{125} = 82.$$

Osnovna cijena je 82 eura.



## ZADATCI 2.2.

1. Pri izrezivanju dijelova iz limene ploče otpad iznosi 5 %. Ako je površina ploče  $6.4 \text{ m}^2$ , koliko lima je otpad?
2. Keramičar treba postaviti pločice u kuhinji čija je površina  $8 \text{ m}^2$ . Pri nabavi pločica preporuča se uzeti 10 % više od površine koju treba prekriti. Koliko  $\text{m}^2$  pločica keramičar treba nabaviti?
3. Od 480 anketiranih građana njih 144 izjasnilo se da na posao dolaze sredstvima javnog prijevoza. Koliki postotak građana dolazi na posao sredstvima javnog prijevoza?
4. U kućnom otpadu papir čini 30 % otpada. Ako je u centru za reciklažu skupljeno 1800 kg papira, kolika je količina ukupnog otpada?
5. U oluji je na automobil palo drvo. Osiguravajuća kuća isplatila je 4840 € kao naknadu štete, a to je 22 % vrijednosti automobila. Kolika je bila vrijednost automobila?
6. Cijena jednog udjela u dobrovoljnom mirovinskom fondu iznosila je 8.75 € u ožujku, a 8.40 € u travnju. Za koliko je posto pala cijena?
7. Cijena dionice tvrtke A iznosila je 45.60 € 31. siječnja, a 30. rujna iznosila je 46.74 €. Za koliko je posto narasla cijena dionice?
8. Cijena automobila s PDV-om je 26 250 €. Kolika je cijena bez PDV-a? PDV iznosi 25 %.
9. Anica je u kafiću platila kavu 1.80 €. Ako je taj kafić u sustavu PDV-a, koliko eura odlazi u državni proračun u obliku PDV-a?
10. Osnovna cijena motorne pile je 480 €. Kolika je prodajna cijena pile ako se prodajna cijena izračunava tako da se osnovnoj cijeni doda PDV koji iznosi 25 % osnovne cijene?
11. Kada bi vrijednost udjela u mirovinskom fondu A porasla za 10 %, njegova bi vrijednost bila za 20 % manja od vrijednosti udjela fonda B. Za koliko bi postotaka trebala porasti vrijednost udjela fonda A da se izjednači s udjelom u fondu B?
12. Cvječar je početkom listopada povećao cijenu svoje robe za 20 %, a onda je pred blagdan Svih svetih snizio cijene 20 %. Je li ovim sniženjem vratio cijene na razinu prije povećanja? Kolika je cijena cvjetnog aranžmana nakon sniženja ako je početna cijena bila 20 €?
13. U sat vremena se u školskoj kantini proda ukupno 35 zdravih napitaka: 8 napitaka od banane, 13 napitaka od vanilije i zobi, 9 napitaka od jagode i 5 napitaka od mrkve i jabuke. Izračunaj postotak za svaku skupinu.
14. Afrika ima površinu  $30.3$  milijuna  $\text{km}^2$ . U njoj se nalazi najveća vruća pustinja na svijetu Sahara. Površina je Sahare  $9.2$  milijuna  $\text{km}^2$ . Koliko posto površine Afrike zauzima Sahara?
15. Zvonimir je putem interneta kupio neke elektroničke komponente što je s carinom platio 1060.50 €. Carina iznosi 5 % vrijednosti kupljenih predmeta. Kolika je bila osnovna cijena komponenata?
16. Mirovinski je fond u 2025. godini imao dobit od 3.4 %. Zlata je od fonda dobila obavijest da je u 2025. godini stanje njezinog računa povećano za 7444.80 €. Koliko je Zlata uplatila u fond tijekom 2025. godine ako se povećanje stanja sastoji samo od njezinih uplata i pripisane dobiti?
17. Bruto masa neke robe je zbroj neto mase i tare. Primjerice, ako se 4 kg jabuka nalazi u drvenom sanduku koji ima 0.9 kg, tada je bruto masa tog sanduka s voćem 4.9 kg, neto je 4 kg, a tara je 0.9 kg.
 

bruto = tara + neto
---------------------

 Bruto masa robe iznosi 450 kg, a tara je 2 % od bruto mase. Koliko kilograma iznosi neto masa robe?
18. Pri transportu voća predviđa se gubitak od 5 %. Koliki je predviđeni gubitak za 5 tona voća?
19. Marko namjerava za kuhinju svog restorana kupiti opremu u vrijednosti od 2500 €. Kupit će ju u subotu jer trgovina tijekom vikenda ima popust od 15 %. Ako račun plati gotovinom, dobit će dodatnih 5 % popusta na već sniženu cijenu. Koliko je Marko platio opremu za kuhinju ako ju je kupio u subotu i platio gotovinom?

## 2.3. Omjeri i razmjeri

Razlomak  $\frac{a}{b}$  poistovjećujemo s količnikom  $a : b$ . Osim pojma količnik u upotrebi je i naziv **omjer** ili **kvocijent**. Budući da razlomke možemo skraćivati i proširivati i time se ne mijenja njihova vrijednost, isto se može činiti i s omjerima, tj.

$$\text{ako je } x : y = k, \text{ tada je } (x \cdot a) : (y \cdot a) = k \text{ i } \frac{x}{a} : \frac{y}{a} = k,$$

pri čemu je  $a \neq 0$ .

### Primjer 1.

Pojednostavnimo omjer  $100 : 75$ , tj. zapišimo ga u obliku omjera dvaju prirodnih brojeva koji nemaju zajednički djelitelj različit od 1.

Podijelit ćemo svaki član omjera sa zajedničkim djeliteljima:

$$100 : 75 = \frac{100}{5} : \frac{75}{5} = 20 : 15 = \frac{20}{5} : \frac{15}{5} = 4 : 3.$$

Mogli smo odmah podijeliti svaki član omjera s najvećim zajedničkim djeliteljem 25:

$$100 : 75 = \frac{100}{25} : \frac{75}{25} = 4 : 3.$$

Mogli smo računati i ovako:

$$100 : 75 = \frac{100}{75} = (\text{skraćivanje s } 25) = \frac{4}{3} = 4 : 3.$$

### Primjer 2.

a) Omjer  $\frac{3}{2} : \frac{8}{3}$  napišimo u obliku omjera prirodnih brojeva.

b) Preoblikujemo omjer  $8 : 12$  tako da prvi član bude 3.

a) Pomnožimo li oba člana omjera sa zajedničkim nazivnikom, dobivamo:

$$\frac{3}{2} : \frac{8}{3} = \left(\frac{3}{2} \cdot 6\right) : \left(\frac{8}{3} \cdot 6\right) = 9 : 16.$$

b) Prvo ćemo dijeljenjem prvi član omjera svesti na 1, a zatim množenjem na 3:

$$8 : 12 = \frac{8}{8} : \frac{12}{8} = 1 : \frac{3}{2} = (1 \cdot 3) : \left(\frac{3}{2} \cdot 3\right) = 3 : \frac{9}{2}.$$

Ako imamo više omjera kod kojih je drugi član prvog omjera jednak prvom članu drugog omjera, tada takve omjere spajamo u jedan produljeni omjer:

$$a : b \quad \text{i} \quad b : c \longrightarrow a : b : c.$$

### Primjer 3.

Napišimo produljeni omjer iz dvaju zadanih omjera:

a)  $5 : 3$  i  $3 : 11$

b)  $2 : 5$  i  $6 : 13$ .

a) U omjeru  $5 : 3$  drugi član je 3 i on je jednak prvom članu u drugom omjeru  $3 : 11$ , pa pišemo  $5 : 3 : 11$ .

b) Ovdje članovi 5 (iz prvog) i 6 (iz drugog) omjera nisu jednaki, pa prvo omjere tako proširimo da stvorimo jednake brojeve:

$$2 : 5 = (2 \cdot 6) : (5 \cdot 6) = 12 : 30, \quad 6 : 13 = (6 \cdot 5) : (13 \cdot 5) = 30 : 65.$$

Produljeni omjer je  $12 : 30 : 65$ .

Na početku smo ovog poglavlja rekli da se omjer može proširiti, tj. da vrijedi  $x : y = (x \cdot a) : (y \cdot a)$ . Isto svojstvo vrijedi i za produljeni omjer, tj. vrijedi  $x : y : z = (x \cdot a) : (y \cdot a) : (z \cdot a)$ , gdje je  $a$  neki broj različit od 0.

### Primjer 4.

U tvornici umjetnih gnojiva proizvode se razne vrste gnojiva, a među njima i gnojivo NPK  $7 : 20 : 30$ . U tom umjetnom gnojivu omjer  $7 : 20 : 30$  označava u kojem su odnosu količine dušika (N), fosfora (P) i kalija (K). Ako vođa proizvodnje želi napraviti NPK  $7 : 20 : 30$  gnojivo s 1200 kg kalija, koliko treba upotrijebiti dušika i fosfora?

Tražimo produljeni omjer jednak omjeru  $7 : 20 : 30$ , ali u kojem je na trećem mjestu 1200. Znači, pomnožit ćemo sve članove omjera s 40 (jer tako od 30 dobivamo 1200):

$$7 : 20 : 30 = (7 \cdot 40) : (20 \cdot 40) : (30 \cdot 40) = 280 : 800 : 1200.$$

Upotrijebit će 280 kg dušika i 800 kg fosfora.

Izjednačimo li dva omjera, dobili smo **razmjer** ili proporciju. Dakle, ako je  $a : b = k$  i  $c : d = k$ , tada je  $a : b = c : d$ . Brojevi  $a$  i  $d$  zovu se vanjski članovi razmjera, a  $b$  i  $c$  unutarnji članovi razmjera.

Iz ovog zapisa razmjera  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  slijedi da je  $ad = bc$ , tj. umnožak vanjskih članova razmjera jednak je umnošku unutarnjih članova.

$$a : b = c : d$$

**Primjer 5.**

Sirup se miješa s vodom u omjeru 2 : 7 kako bi se dobio sok. Koliko vode treba dodati ako imamo 46 cl sirupa?

Vrijedi  $2 : 7 = 46 : x$ , gdje je  $x$  količina vode. Tada je  $2x = 7 \cdot 46$ ,  $2x = 322$ ,  $x = 322 : 2 = 161$  cl. Treba dodati 161 cl vode.

**Razmjerne ili proporcionalne veličine****Primjer 6.**

Na tubi kreme piše da 50 mg kreme sadržava 1 mg mentola. Koliko mg mentola ima u 100 mg kreme, a koliko u 200 mg? Koliko mg mentola ima 160 mg kreme?

U dvostruko više kreme ima dvostruko više mentola, u četverostruko više kreme ima četverostruko više mentola. Prikažimo podatke iz ovog zadatka tablično.

$x$ (mg kreme)	50	100	200
$y$ (mg mentola)	1	2	4

Uočimo da je omjer  $\frac{y}{x}$  u sva tri slučaja jednak  $\frac{1}{50}$ .

Veličine čiji je omjer stalan nazivaju se **razmjerne** ili **proporcionalne** veličine. U ovom primjeru količine kreme i mentola razmjerne su veličine i vrijedi  $\frac{y}{x} = \frac{1}{50}$ , tj.  $y = \frac{1}{50}x$ . Broj  $\frac{1}{50}$  označava se s  $k$  i naziva **koeficijent proporcionalnosti**.

Graf razmjernih veličina je pravac, dio pravca ili samo skup točaka koje pripadaju pravcu. U ovom slučaju graf je polupravac jer nema smisla uzimati negativne brojeve za količinu kreme.

Odgovor na zadnje pitanje potražimo uvrštavajući dane podatke u vezu  $y = \frac{1}{50}x$ ,  $y = \frac{1}{50} \cdot 160 = 3.2$  mg. Mogli smo primijeniti i metodu koju nazivamo **pravilo trojno**.



grafički prikaz razmjernosti

