

Geometrija ravnine

1.

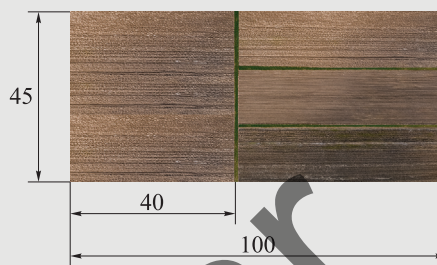


Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- prepoznavati i opisivati geometrijske likove: trokut, pravokutnik, paralelogram, trapez, krug
- računati opseg i površinu osnovnih geometrijskih likova i likova složenih od njih
- definirati i konstruirati četiri karakteristične točke trokuta i analizirati njihov položaj ovisno o vrsti trokuta
- primijeniti poučke o sličnosti trokuta u modeliranju problema
- odrediti i primijeniti odnose stranica, opsega i površina sličnih trokuta
- povezati pojedine sadržaje i primijeniti ih pri rješavanju geometrijskih zadataka, problema iz struke i svakodnevnog života.

ISTRAŽI

OPG raspolaže zemljištem pravokutnog oblika dimenzija $100 \text{ m} \times 45 \text{ m}$ na kojemu žele zasaditi nekoliko vrsta povrća. Zemljište je podijeljeno na četiri dijela: jedan veći dio i tri manja dijela jednakih dimenzija. Kolike su dimenzije i površina jednog od manjih dijelova? Na najveći dio zemljišta posijati će blitvu. Kolika je količina sjemenja potrebna ako se za 1 ha upotrijebi 20 kg sjemenja?



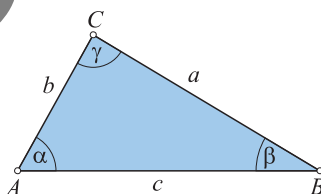
Rješavanje ovog zadatka zahtijeva poznavanje svojstava pravokutnika te računanje njegove površine. Kako izračunati površinu ne samo pravokutnika nego i drugih likova, detaljno ćemo proučiti u ovom poglavlju.

1.1. Trokut

Trokut

Neka su A , B i C tri različite točke koje ne leže na istom pravcu. **Trokut** ABC je dio ravnine omeđen trima dužinama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

Točke A , B i C zovu se **vrhovi** trokuta, dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ **stranice** trokuta, a kutovi $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle ACB$ unutarnji **kutovi** trokuta. Za kutove i za njihove veličine koristimo redom i oznake α , β , γ .



Općenito, za vrhove se koriste velika slova latinice, a za kutove mala slova grčkog alfabeta. Duljine stranica obično označavamo malim slovima latinice, tj. $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

1. Osnovno svojstvo trokuta jest: zbroj duljina dviju stranica veći je od duljine treće stranice, tj.

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$

To svojstvo zovemo **nejednakost trokuta**.

2. Istaknimo još jedno svojstvo trokuta: zbroj veličina svih kutova u trokutu je 180° , tj. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Primjer 1.

Izračunajmo kut γ u trokutu ABC ako je:

a) $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 48^\circ$

b) $\alpha = 28^\circ 48' 52''$, $\beta = 73^\circ 23' 14''$.

a) U trokutu vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ pa je:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (35^\circ + 48^\circ) = 180^\circ - 83^\circ = 97^\circ$$

b) Ovdje su veličine kutova zadane u stupnjevima, minutama i sekundama. Vrijede ove veze: 1 stupanj ima 60 kutnih minuta, tj. $1^\circ = 60'$, a 1 minuta ima 60 kutnih sekundi, tj. $1' = 60''$.

$$1^\circ = 60', \quad 1' = 60''$$

Prvo zbrojimo α i β .

Sad je

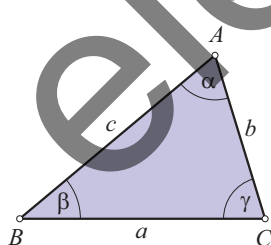
$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - (\alpha + \beta) \\ &= 180^\circ - 102^\circ 12' 6'' \\ &= 179^\circ 59' 60'' - 102^\circ 12' 6'' \\ &= 77^\circ 47' 54''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 28^\circ 48' 52'' + 73^\circ 23' 14'' = 101^\circ 71' 66'' \\ &\quad \downarrow 66'' = 60'' + 6'' = 1' 6'' \\ &= 101^\circ 72' 6'' = 102^\circ 12' 6'' \\ &\quad \downarrow 72' = 60' + 12' = 1^\circ 12' \end{aligned}$$

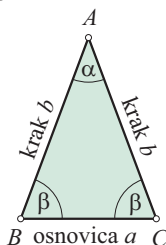
Ovaj se račun može provesti i na džepnom računalu. Obično se za unos kutova zadanih u stupnjevima, minutama i sekundama koriste tipke **DMS** ili **° ' ''**. Izvedi ovaj račun na svom kalkulatoru.

Vrste trokuta

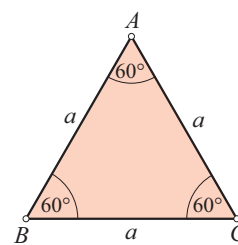
Trokute razlikujemo s obzirom na stranice ili s obzirom na kutove. S obzirom na duljine stranica razlikujemo raznostranične, jednakokračne i jednakostranične trokute.



raznostranični trokut

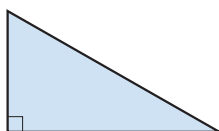
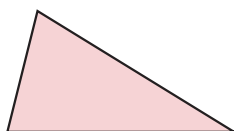


jednakokraki trokut



jednakostranični trokut

S obzirom na kutove trokute dijelimo na šiljastokutne, pravokutne i tupokutne.



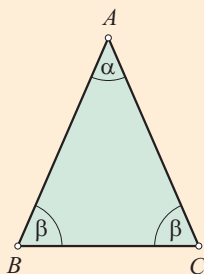
Na slici su redom: šiljastokutni, pravokutni i tupokutni trokut.

U šiljastokutnom trokutu svi su kutovi šiljasti, tj. manji od 90° , u pravokutnom trokutu jedan kut je pravi kut, tj. jednak 90° dok su ostala dva šiljasta. U tupokutnom trokutu jedan je kut tupi, tj. veći od 90° , a preostala dva su šiljasta.

Dva trokuta koja se podudaraju u svim stranicama i kutovima nazivaju se **sukladni** trokuti.

Primjer 2.

Izračunajmo kutove uz osnovicu jednakokraknog trokuta ABC ako mu kut između krakova ima veličinu $\alpha = 47^\circ$.



Kutovi uz osnovicu imaju jednake veličine, tj. vrijedi:

$$\alpha + \beta + \beta = 180^\circ$$

$$47^\circ + 2\beta = 180^\circ$$

$$2\beta = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$$

$$\beta = 66.5^\circ = 66^\circ 30'.$$

Veličine kutova uz osnovicu su $66^\circ 30'$.

Pitagorin poučak

Neka je ABC pravokutni trokut s pravim kutom pri vrhu C . Najdulja stranica, tj. stranica nasuprot vrhu C naziva se **hipotenuza** dok se ostale dvije stranice zovu **katete**.

U pravokutnom trokutu ABC vrijedi:

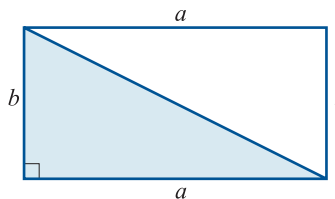
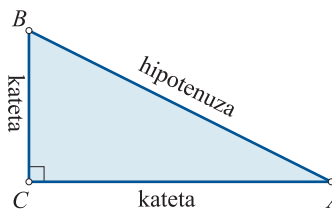
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

jer je zbroj svih triju kutova 180° , a budući da je jedan kut pravi, zbroj preostalih dvaju kutova mora biti 90° .

Uočimo da je površina pravokutnog trokuta jednaka

$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

jer ga možemo smatrati polovinom pravokutnika sa stranicama duljina a i b .



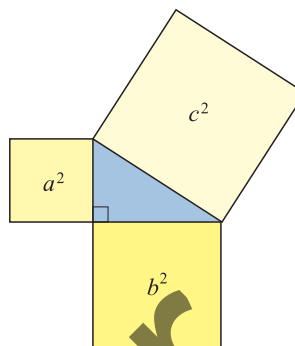
Za pravokutne trokute vrijedi sljedeće svojstvo koje se naziva Pitagorin poučak:

Pitagorin poučak

U pravokutnom trokutu ABC s pravim kutom pri vrhu C vrijedi:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

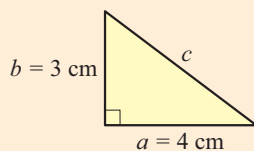
Ovaj se poučak može izreći i ovako: u pravokutnom je trokutu površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka zbroju površina kvadrata nad katetama.



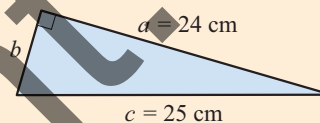
Primjer 3.

Izračunajmo nepoznatu stranicu pravokutnog trokuta.

a)



b)



a) Uvrštavanjem u formulu $c^2 = a^2 + b^2$ dobivamo $c^2 = 3^2 + 4^2$, $c^2 = 9 + 16$, $c^2 = 25$, $c = 5$ cm.

b) $c^2 = a^2 + b^2$, $25^2 = 24^2 + b^2$, $b^2 = 25^2 - 24^2$, $b^2 = 625 - 576$, $b^2 = 49$, $b = \sqrt{49}$, $b = 7$ cm.

Primjer 4.

Izračunajmo visinu jednakokraničnog trokuta kojemu je stranica dugačka a .

Visina je dužina iz vrha A okomita na stranicu $\overline{BC}$. Ona dijeli trokut ABC na dva sukladna pravokutna trokuta. Na trokut ABD primijenimo Pitagorin poučak:

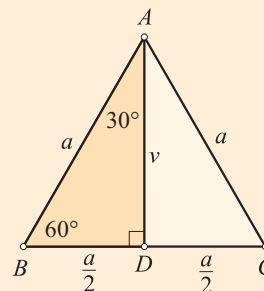
$$a^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Izrazimo v^2 :

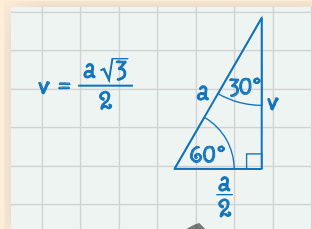
$$v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$v = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Zapamtimo ovu formulu za visinu jednakostraničnog trokuta.



Primjer 5.

Izračunajmo visinu jednakokraknog trokuta kojemu je osnovica duljine 16 cm, a duljine krakova 10 cm.

Spustimo li iz vrha A visinu na osnovicu $\overline{BC}$, jednakokrakan se trokut dijeli na dva sukladna pravokutna trokuta.

U pravokutnom trokutu ADC duljina hipotenuze je b , a duljine kateta su v i $\frac{a}{2}$. Prema Pitagorinu poučku imamo:

$$b^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Zadano je $a = 16$ cm i $b = 10$ cm pa uvrštavanjem u gornju formulu imamo:

$$10^2 = v^2 + \left(\frac{16}{2}\right)^2$$

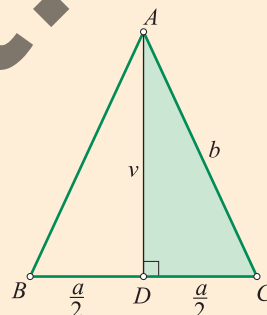
$$100 = v^2 + 64$$

$$v^2 = 100 - 64$$

$$v^2 = 36$$

$$v = \sqrt{36} = 6 \text{ cm.}$$

Duljina visine trokuta je 6 cm.



Je li jednakost $c^2 = a^2 + b^2$ karakteristika samo pravokutnih trokuta ili postoje još neke vrste trokuta u kojima ona vrijedi? Ova je jednakost karakteristika samo pravokutnih trokuta. O tome govori obrat Pitagorina poučka.

Obrat Pitagorina poučka

Ako za duljine stranica a , b , c nekog trokuta vrijedi jednakost $c^2 = a^2 + b^2$, taj je trokut pravokutan s duljinom hipotenuze c .

Primjer 6.

Je li trokut čije su stranice $a = 7$ cm, $b = 24$ dm i $c = 2.5$ dm pravokutan?

Prvo izrazimo sve duljine u centimetrima: $a = 7$ cm, $b = 24$ cm, $c = 25$ cm. Provjerimo vrijedi li jednakost $c^2 = a^2 + b^2$.

$$a^2 + b^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 \text{ cm}^2$$

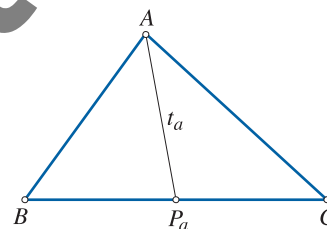
$$c^2 = 25^2 = 625 \text{ cm}^2$$

Jednakost vrijedi pa je trokut pravokutan.

Karakteristične točke trokuta**Težište**

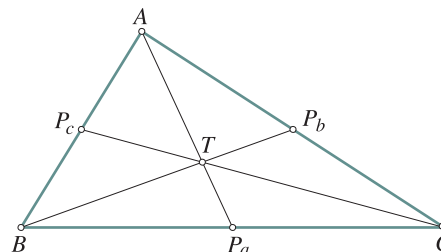
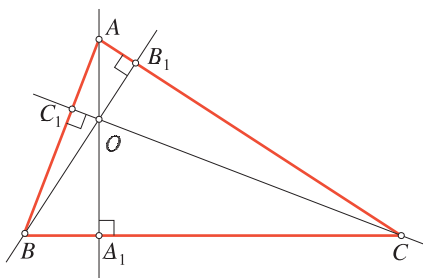
Težišnica je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice.

Očito je da u trokutu postoje tri težišnice i što je zanimljivo, sve se tri sijeku u jednoj točki.

**Poučak o težištu trokuta**

Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki koja se naziva **težište**.

Također, težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2:1 računajući od vrha, tj. dio težišnice od težišta do vrha dvostruko je veći od preostalog dijela težišnice.

**Ortocentar**

Nacrtajmo šiljastokutni trokut ABC pa vrhovima A , B i C povucimo okomice na nasuprotne stranice.

Te okomice sijeku stranice u točkama A_1 , B_1 , C_1 . Dužine $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ nazivaju se **visine** trokuta ABC , a točke A_1 , B_1 , C_1 nazivaju se nožišta visina.

Sva tri pravca sijeku se u jednoj točki.

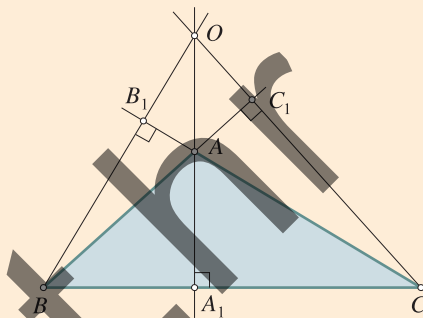
Poučak o ortocentru

Pravci na kojima leže visine sijeku se u jednoj točki koja se naziva **ortocentar** trokuta.

Primjer 7.

Nacrtajmo tupokutni trokut i njegov ortocentar.

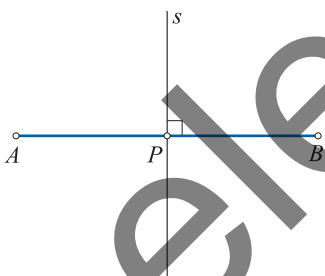
Kod tupokutnog trokuta ortocentar je izvan trokuta.

**Središte opisane kružnice**

Prisjetimo se što znamo o simetrali dužine.

Simetrala dužine

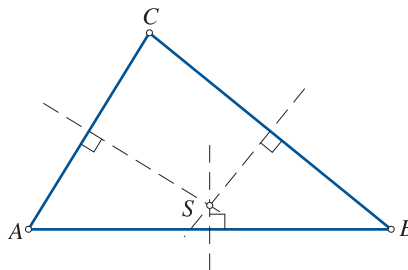
Simetrala dužine je pravac koji raspolavlja tu dužinu i okomit je na nju.



Sve točke ravnine koje su jednako udaljene od krajnjih točaka dužine pripadaju njenoj simetrali s .

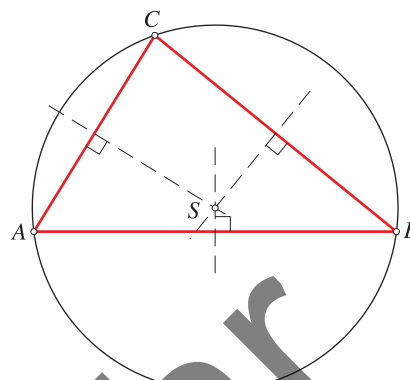
Nacrtajmo trokut ABC i simetrale svih njegovih stranica.

Sve tri simetrale sijeku se u jednoj točki S koja je jednako udaljena od sva tri vrha trokuta.

**Poučak o simetralama stranica trokuta**

Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki koja je jednako udaljena od svih vrhova trokuta.

Ta točka S zove se **središte opisane** kružnice trokuta. Kružnica sa središtem S i polumjerom $|SA|$ prolazi kroz sva tri vrha trokuta i naziva se **opisana kružnica** trokuta ABC .

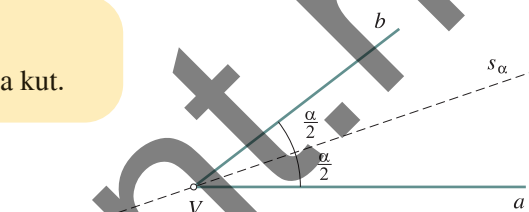
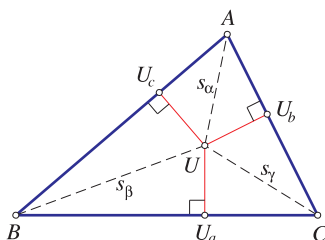


Središte upisane kružnice

Središte upisane kružnice trokuta ABC usko je povezano sa simetralama kutova. Simetrala kuta definira se ovako:

Simetrala kuta

Simetrala kuta je pravac koji raspolavlja kut.



Simetrala s_α kuta $\sphericalangle aVb$ dijeli taj kut na dva jednaka dijela.

Osnovno svojstvo simetrale kuta jest da točka kuta pripada simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od krakova tog kuta.

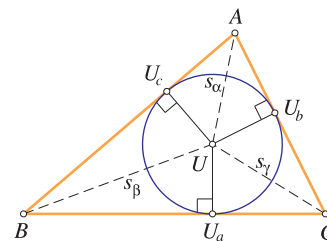
Nacrtajmo trokut ABC i sve tri simetrale unutrašnjih kutova trokuta ABC .

Kao što vidimo, sve tri simetrale kutova sijeku se u jednoj točki U koja se zove središte upisane kružnice trokuta ABC .

Poučak o simetralama kutova trokuta

Simetrale unutrašnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki koja je jednako udaljena od stranica tog trokuta.

Dakle, kružnica sa središtem U i polumjerom $\rho = |UU_a|$ dira sve tri stranice trokuta. Ova kružnica zove se **upisana kružnica** trokuta ABC .



Težište, ortocentar, središte opisane i središte upisane kružnice trokuta nazivaju se **karakteristične točke trokuta**.