

Koordinatni sustav

1.



Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- opisati koordinatni sustav u ravnini
- u koordinatnom sustavu nacrtati točku zadanu koordinatama
- očitati koordinate nacrtane točke
- nacrtati dužine i likove čiji su vrhovi zadani koordinatama
- odrediti koordinate vrhova zadanog lika
- izračunati duljinu dužine
- izračunati koordinate polovišta dužine
- povezati pojedine sadržaje i primijeniti ih pri rješavanju geometrijskih zadataka, problema iz struke i svakodnevnog života.

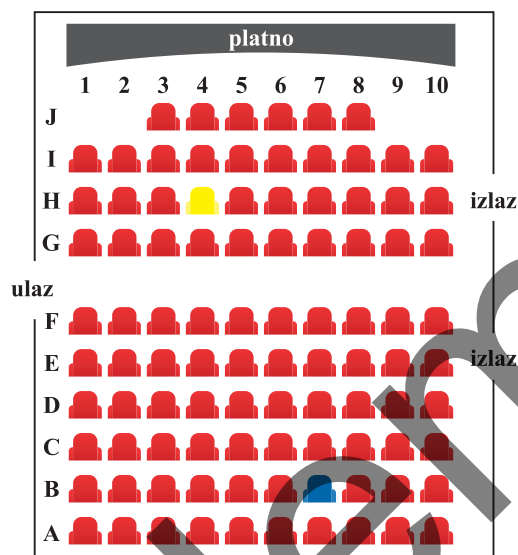
1.1. Osnovno o koordinatnom sustavu

Tražeći podatke za referat o najvišim planinskim vrhovima Hrvatske, Mario je na internetu pronašao da je Dinara, u narodu zvan i Sinjal, najviši vrh Hrvatske, te da je visok 1831 m.

Uz to je pronašao i njegove geografske koordinate koje iznose: $N 44^{\circ}3'44.9''$ (geografska širina) i $E 16^{\circ}22'58.3''$ (geografska dužina). S pomoću uređenog para (geografska širina, geografska dužina) položaj svake točke na Zemaljskoj kugli precizno je uređen.



$N 44^{\circ}3'44.9''$
 $E 16^{\circ}22'58.3''$



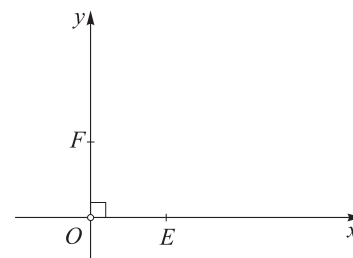
Drugi primjer označavanja pozicije s pomoću uređenih parova uobičajen je pri rasporedu mjesta u kinodvoranama, kazalištima, koncertnim dvoranama i drugdje.

Na slici je prikazan plan jedne kinodvorane i na njeju je plavom bojom označeno sjedalo broj 7 u redu B, a žutom bojom sjedalo broj 4 u redu H.

Uz dogovor da se oznaka reda stavlja na prvo mjesto, a broj sjedala na drugo mjesto, spomenuta dva sjedala imaju koordinate $(B, 7)$ i $(H, 4)$.

Ovdje ćemo detaljno proučiti koordinatni sustav u kojem su obje koordinate brojevi.

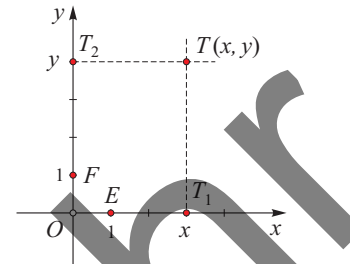
Neka su x i y dva međusobno okomita pravca sa sjecištem u točki O i neka su E i F jedinične točke na pravcima x i y . Uređena trojka (O, x, y) naziva se pravokutni ili Kartezijev **koordinatni sustav u ravnini**. Točka O naziva se ishodište; za pravac x koristimo nazive apscisna os, os apscisa, prva koordinatna os ili kratko x -os dok se pravac y naziva ordinatna os, os ordinata, druga koordinatna os ili y -os.



Uređenu trojku (O, x, y) pri čemu su x i y okomiti brojevi pravci sa zajedničkim ishodištem, nazivamo pravokutnim koordinatnim sustavom u ravnini.

Pokažimo kako u koordinatnom sustavu prikazati uređeni par brojeva. Neka je (x, y) dani uređeni par.

- Na x -osi odaberemo točku T_1 koja je pridružena broju x .
Kroz T_1 povučemo pravac usporedan s y -osi.
- Na y -osi odaberemo točku T_2 koja je pridružena broju y .
Kroz točku T_2 povučemo usporedni pravac s x -osi.
- Nacrtni se pravci sijeku u točki T koja je pridružena uređenom paru (x, y) .



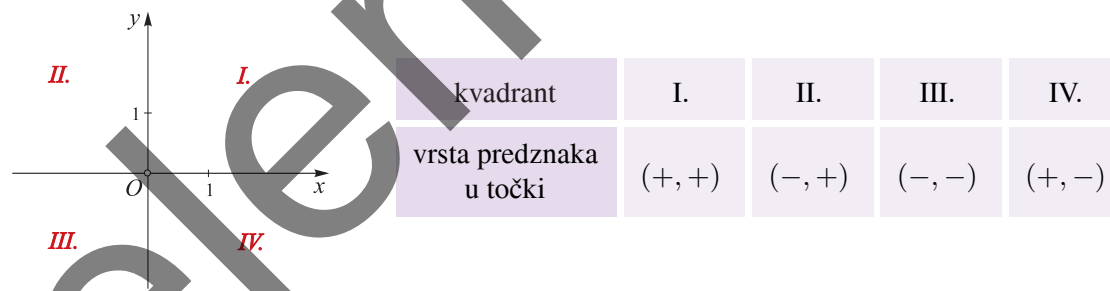
Na taj način svakom uređenom paru (x, y) pridružujemo jednu točku T . Broj x naziva se **apscisa** točke T ili prva koordinata točke T . Broj y naziva se **ordinata** točke T ili druga koordinata točke T . Jednim imenom brojeve x i y nazivamo **koordinatama** točke T i označavamo $T(x, y)$.

Ovo je pridruživanje obostrano. Naime, svakoj točki T u ravnini crtanjem pravaca usporednih s x -osi i y -osi pronalazimo brojeve x i y na osima koji čine uređeni par (x, y) .

Povijesno gledano, prvi je ideju koordinatnog sustava detaljno razradio francuski matematičar, fizičar i filozof René Descartes (1596. – 1650.). Prema njegovom latiniziranom imenu Cartesius danas koordinatne sustave nazivamo i Kartezijevim koordinatnim sustavima.

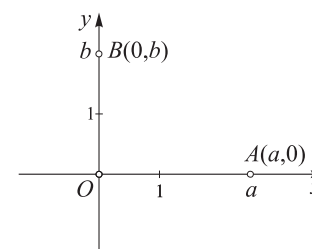


Koordinatne osi ravninu dijele na četiri područja koja se nazivaju **kvadranti**.



U prvom kvadrantu nalaze se točke kojima su obje koordinate pozitivne, u drugom kvadrantu apscisa točke je negativan, a ordinata pozitivan broj. Objе koordinate točaka u III. kvadrantu su negativni brojevi dok je apscisa točke četvrtog kvadranta pozitivna, a ordinata negativna.

Točke na x -osi imaju drugu koordinatu jednaku 0 dok točke na y -osi imaju prvu koordinatu jednaku 0. Koordinate ishodišta su $(0, 0)$.



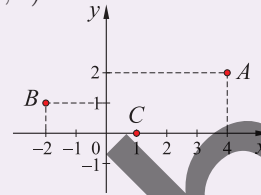
Primjer 1.

Nacrtajmo u koordinatnoj ravnini točke $A(4, 2)$, $B(-2, 1)$, $C(1, 0)$.

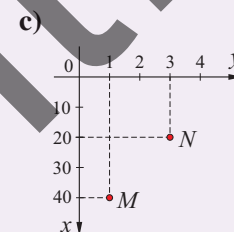
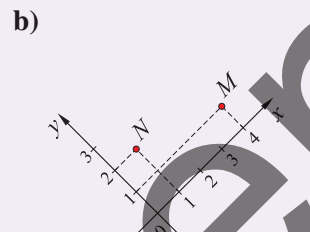
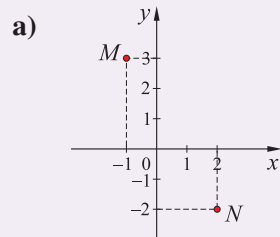
Nacrtajmo točku A . Kroz točku 4 na x -osi nacrtajmo paralelu s y -osi, a kroz točku 2 na y -osi nacrtajmo paralelu s x -osi. Njihovo sjecište je točka A .

Slično se postupi i za B .

Točka C ima drugu koordinatu 0 pa se nalazi na x -osi.

**Primjer 2.**

Očitajmo koordinate točaka M i N .



a) $M(-1, 3)$, $N(2, -2)$

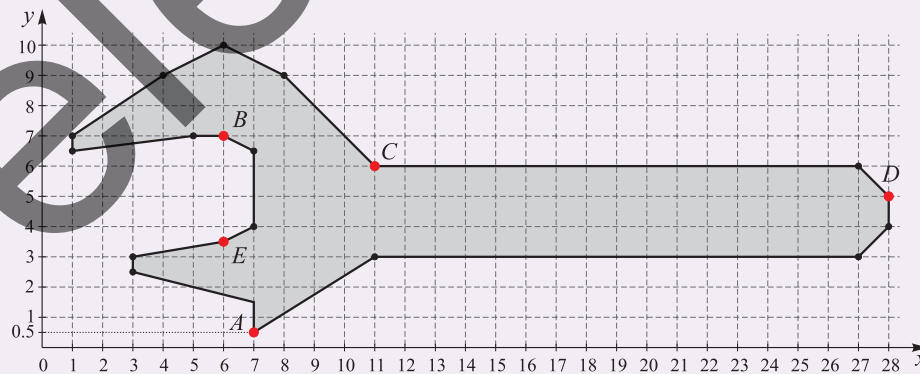
b) $M(4, 1)$, $N(1, 2)$

c) $M(40, 1)$, $N(20, 3)$.

Uočimo da su u **b)** i **c)** podzadatku koordinatne osi u drukčijem položaju nego što smo objasnili u uvodu ove teme. Ovisno o različitim situacijama u primjeru koristimo se različitim položajima osi, a kao što vidimo u **c)** podzadatku, ni jedinične dužine ne moraju biti jednake.

Primjer 3.

Odredimo koordinate točaka A , B , C , D i E istaknutih na liku.

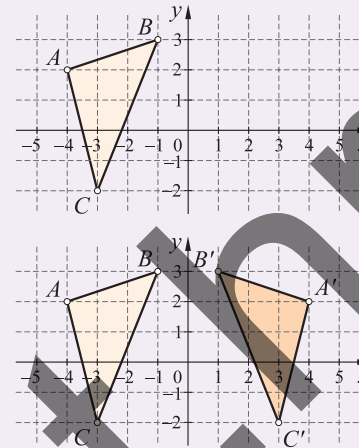


$A(7, 0.5)$, $B(6, 7)$, $C(11, 6)$, $D(28, 5)$, $E(6, 3.5)$

Primjer 4.

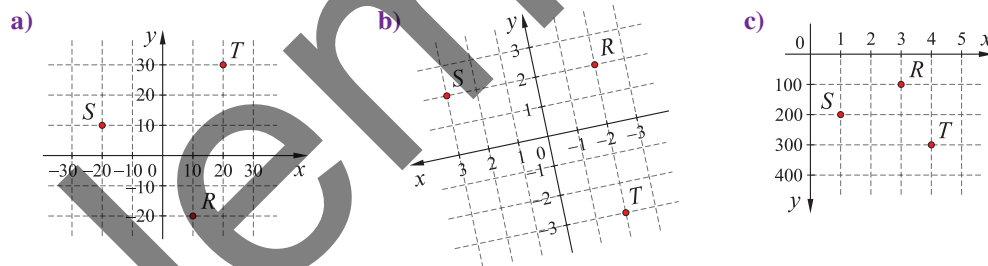
Odredimo koordinate trokuta na slici. Zatim ga preslikajmo osnom simetrijom s obzirom na y -os i odredimo koordinate vrhova osnosimetrične slike trokuta.

Koordinate su $A(-4, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(-3, -2)$. Os simetrije je y -os pa iz vrha A povučemo okomicu na y -os i na njoj odredimo točku A' koja je od y -osi udaljena za 4, tj. za isto onoliko koliko je A udaljena od y -osi. Slično se postupa i za točke B i C pa je $A'(4, 2)$, $B'(1, 3)$, $C'(3, -2)$.

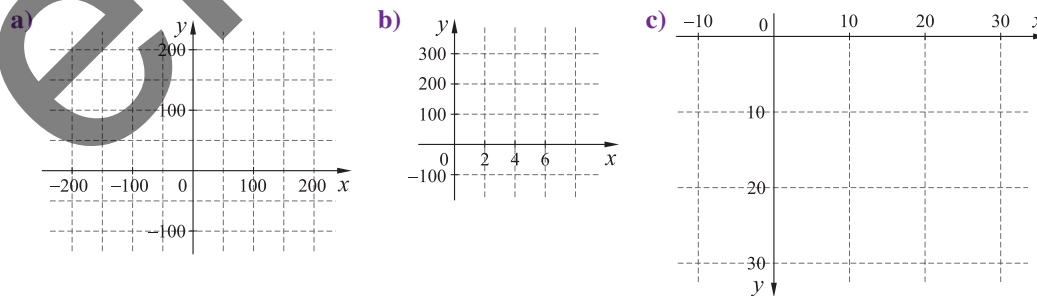


ZADATCI 1.1.

- Nacrtaj u koordinatnoj ravnini zadane točke: $A(0, 5)$, $B(-2, 0)$, $C(-1, 3)$, $D(4, -2)$, $E(1, -1)$, $F(-3, -2)$, $G(3, 2)$. U kojim se kvadrantima ili na kojim se osima nalaze zadane točke?
- Nacrtaj u koordinatnoj ravnini točke $M(0.2, 0.8)$, $N(-0.7, 1.1)$, $K(0.6, -\frac{1}{2})$ ako su duljine jediničnih dužina na koordinatnim osima:
 - 1 cm
 - 2 cm
 - 25 mm.
- Očitaj koordinate točaka S , R i T .



- Nacrtaj koordinatne sustave u bilježnici i u njih ucrtaj zadane točke P , R , S .



$P(200, 100)$, $R(50, -100)$,
 $S(-150, 150)$

$P(4, 200)$, $R(3, 100)$,
 $S(6, 150)$

$P(10, 30)$, $R(-5, 20)$,
 $S(25, 12)$

1.

Koordinatni sustav

5. U koordinatnim sustavima s pogodno odabranim jediničnim točkama nacrtaj zadane točke:
- a) $A(20, 30)$, $B(-20, 10)$, $C(-15, 15)$ b) $A(150, 200)$, $B(400, 330)$, $C(-200, 110)$
- c) $A(1, 200)$, $B(-2, 100)$, $C(3, 300)$.

6. Očitaj koordinate svih vrhova lika iz primjera 3.

7. U koordinatnom sustavu ucrtaj i redom spoji ove točke: $(6, 0)$, $(6, 2)$, $(5, 4)$, $(4, 5)$, $(2, 6)$, $(0, 6)$, $(-2, 6)$, $(-4, 5)$, $(-5, 4)$, $(-6, 2)$, $(-6, 0)$, $(-6, -2)$, $(-5, -4)$, $(-4, -5)$, $(-2, -6)$, $(6, -6)$, $(2, -6)$, $(4, -5)$, $(5, -4)$, $(6, -2)$, $(6, 0)$. Zatim ucrtaj i redom spoji ove točke: $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(3.5, 1)$, $(3.5, 2)$, $(3, 3)$, $(2, 3)$, $(1.5, 2)$, $(2, 0)$. Ucrtaj i spoji sljedeće točke: $(-3, 0)$, $(-2, 0)$, $(-1.5, 1)$, $(-1.5, 2)$, $(-2, 3)$, $(-3, 3)$, $(-3.5, 2)$, $(-3.5, 1)$, $(-3, 0)$. Konačno, ucrtaj i spoji točke: $(-3.5, -2)$, $(-3, -3)$, $(-2, -4)$, $(-1, -4.5)$, $(1, -4.5)$, $(2, -4)$, $(3, -3)$, $(3.5, 2)$. Opiši lik koji si dobio.

8. Nacrtaj točke $A(2, 3)$, $B(-2, -4)$, $C(3, -1)$ i njima simetrične točke s obzirom na:

- a) x -os b) y -os.

U kojim se kvadrantima nalaze točke A, B, C ?

9. a) Napiši četiri točke koje pripadaju II. kvadrantu.

- b) Napiši tri točke koje pripadaju IV. kvadrantu.

- c) Napiši dvije točke koje pripadaju y -osi.

10. Koja od sljedećih rečenica je istinita? Obrazloži.

- a) Ako točka ima pozitivnu prvu koordinatu, tada ona pripada prvom kvadrantu.

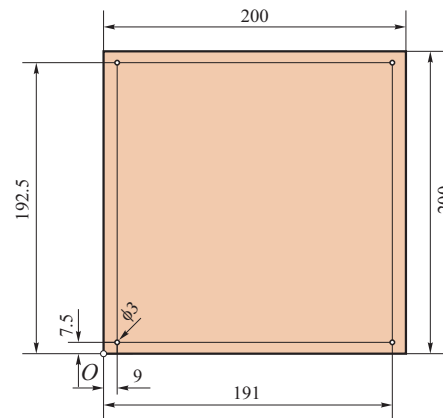
- b) Sve točke iz četvrtog kvadranta imaju pozitivne apscise.

- c) Ako točka ima ordinatu jednaku 0, ona pripada ordinatnoj osi.

11. Dan je jedan dio zemljopisne karte. Odredi približne koordinate ovih mjesta: Sv. Ivan Zelina, Dugo Selo, Velika Gorica, Ježevo, Brckovljani, Kašina, Mraclin. Zadnju znamenku minuta zaokruži na 0 ili 5. Koje naselje je najbliže točki s koordinatama $(45^{\circ}55', 16^{\circ}5')$?



12. U drvenoj ploči dimenzija $200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ treba izbušiti četiri rupe prema danom nacrtu. Odredi koordinate središta rupa. Ishodište sustava postavi u lijevi donji kut ploče, a bridovi ploče neka leže na koordinatnim osima.



1.2. Udaljenost točaka u ravnini

Primjer 1.

Izračunajmo udaljenost točaka $A(1, 2)$ i $B(3, 2)$.

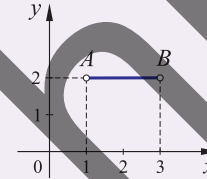
Točke A i B imaju jednake ordinate pa je dužina \overline{AB} paralelna s apscisnom osi. Stoga su točke A i B udaljene upravo onoliko koliko su njihove apscise udaljene na x -osi, tj.

$$|AB| = 3 - 1 = 2.$$

Općenito, ako je dužina \overline{AB} paralelna s apscisnom osi, tada je udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_1)$ jednaka

$$|AB| = |x_2 - x_1|.$$

U formuli $|x_2 - x_1|$ koristimo se apsolutnom vrijednosti kako bismo uvijek za udaljenost dobili nenegativan broj bez obzira je li x_2 veće ili manje od x_1 .



Primjer 2.

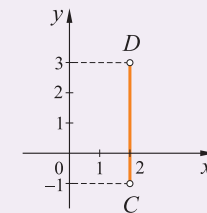
Izračunajmo duljinu dužine \overline{CD} ako je $C(2, -1)$ i $D(2, 3)$.

Točke C i D imaju jednake apscise pa je dužina \overline{CD} paralelna s ordinatnom osi. Stoga su točke C i D udaljene upravo onoliko koliko su njihove ordinate udaljene od y -osi, tj.

$$|CD| = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4.$$

Općenito, duljina dužine \overline{CD} , $C(x_1, y_1)$, $D(x_1, y_2)$, koja je paralelna s y -osi jednaka je

$$|CD| = |y_2 - y_1|.$$



Primjer 3.

Izračunajmo udaljenost točaka $A(2, 1)$, $B(6, 4)$.

Neka je C presjek paralele kroz točku A s x -osi i paralele kroz točku B s y -osi. Trokut ABC je pravokutan. Tada je

$$|AC| = |6 - 2| = 4$$

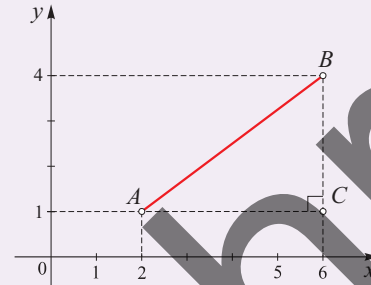
$$|BC| = |4 - 1| = 3.$$

1.

Koordinatni sustav

Primjenom Pitagorina poučka na trokut ABC imamo

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

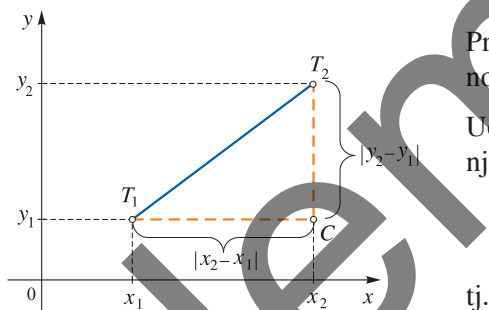


Postupak koji smo u ovom primjeru primijenili iskoristit ćemo za dokaz formule za izračunavanje udaljenosti dviju točaka u ravnini.

Udaljenost dviju točaka

Ako su $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ dvije točke ravnine, tada je udaljenost točaka T_1 i T_2 dana s

$$|T_1T_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Dokaz.

Promotrimo slučaj kad dužina $\overline{T_1T_2}$ nije paralelna ni s jednom koordinatnom osi.

Uočimo na slici pravokutni trokut T_1CT_2 . Dužina $\overline{T_1T_2}$ je njegova hipotenuza pa vrijedi

$$\begin{aligned} |T_1T_2|^2 &= |T_1C|^2 + |T_2C|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \end{aligned}$$

tj.

$$|T_1T_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \blacktriangleleft$$

Ako je dužina $\overline{T_1T_2}$ paralelna s x -osi, tj. ako je $y_1 = y_2$, tada uvrštavanjem koordinata u formulu dobivamo

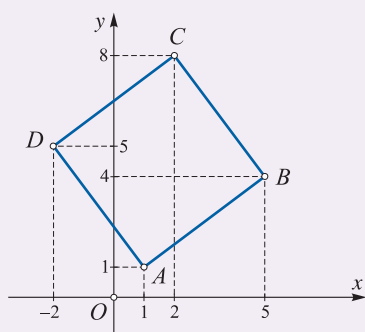
$$\begin{aligned} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

što je upravo formula za udaljenost dviju točaka koju smo imali u primjeru 1. Slično se pokaže da se i u slučaju kad je dužina $\overline{T_1T_2}$ paralelna s y -osi formula za $|T_1T_2|$ podudara s onom iz primjera 2. Drugim riječima, formula $|T_1T_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ vrijedi za sve položaje točaka T_1 i T_2 .

Primjer 4.

Dokažimo da je četverokut $ABCD$, $A(1, 1)$, $B(5, 4)$, $C(2, 8)$, $D(-2, 5)$, kvadrat. Izračunajmo opseg četverokuta $ABCD$. **Opseg** nekog lika je zbroj duljina svih njegovih stranica.

Trebamo provjeriti jesu li sve stranice jednakih duljina i jesu li duljine dijagonala jednake jer su to karakteristična svojstva kvadrata.



$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5$$

$$|BC| = \sqrt{(2-5)^2 + (8-4)^2} = 5$$

$$|CD| = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-8)^2} = 5$$

$$|DA| = \sqrt{(1+2)^2 + (1-5)^2} = 5$$

$$|AC| = \sqrt{(2-1)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|BD| = \sqrt{(-2-5)^2 + (5-4)^2} = 5\sqrt{2}$$

Slijedi da je četverokut $ABCD$ kvadrat.

Opseg četverokuta $ABCD$ je $o = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 4 \cdot 5 = 20$.

ZADATCI 1.2.

1. Izračunaj $|AB|$ ako je:

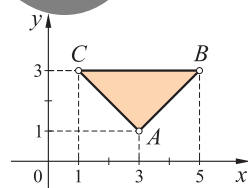
- a) $A(1, 2)$, $B(4, 6)$ b) $A(7, 6)$, $B(1, -2)$ c) $A(-1, -3)$, $B(14, 5)$ d) $A(1, 1)$, $B(4, 4)$.

2. Izračunaj $|CD|$ ako je:

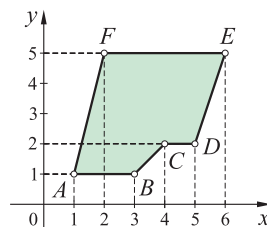
- a) $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $D(1, 1)$ b) $C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $D(0, 2)$ c) $C(0, 0)$, $D(3, 1)$ d) $C\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $D\left(\frac{1}{3}, \frac{9}{3}\right)$.

3. Izračunaj duljine svih stranica likova nacrtanih u koordinatnom sustavu i zbroji ih, tj. izračunaj opseg tih likova. U c) zadatku rezultat prikaži u decimalnom obliku na dvije decimale.

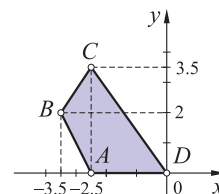
a)



b)



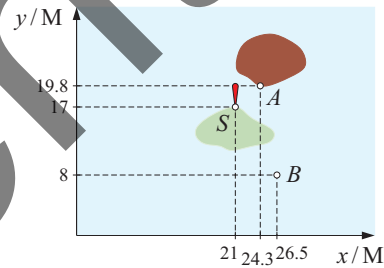
c)



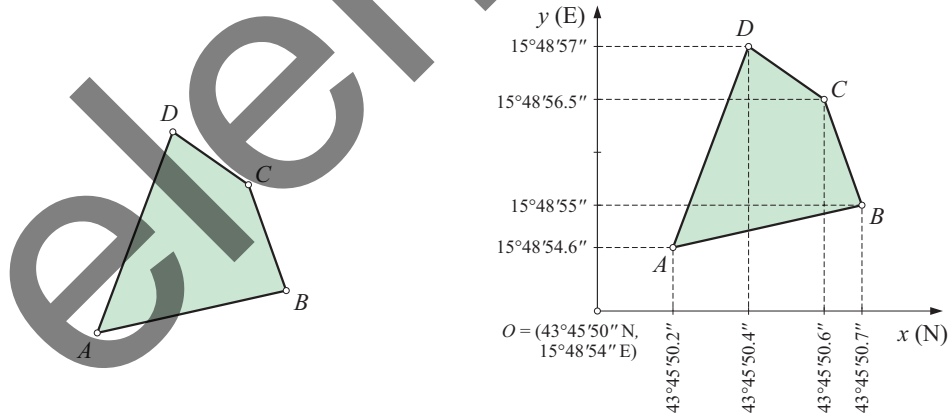
1.

Koordinatni sustav

4. Izračunaj opseg trokuta ABC ako je:
- a) $A(4, 3)$, $B(0, 0)$, $C(12, -5)$ b) $A(-1, -1)$, $B(2, 0)$, $C(0, 5)$
 c) $A(0, 5)$, $B(6, 7)$, $C(4, 1)$ d) $A(1, 0)$, $B(-3, -3)$, $C(9, -8)$.
5. Dokaži da je $\triangle ABC$ pravokutan, tj. da vrijedi Pitagorin poučak (kvadrat duljine najdulje stranice jednak je zbroju kvadrata duljina preostalih dviju stranica) ako je:
- a) $A(3, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 2)$ b) $A(2, 2)$, $B(3, 4)$, $C(6, 0)$
 c) $A(-1, -1)$, $B(2, 0)$, $C(0, 6)$ d) $A(2, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(-5, 3)$.
6. Provjeri je li četverokut $ABCD$ pravokutnik, tj. jesu li mu nasuprotne stranice jednakih duljina i jesu li mu i dijagonale jednako dugačke ako je:
- a) $A(0, 0)$, $B(3, 1)$, $C(1, 7)$, $D(-2, 6)$ b) $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(5, -1)$, $D(4, -3)$.
7. Dokaži da je trokut ABC jednakokravan ako je:
- a) $A(-1, 4)$, $B(5, 6)$, $C(3, 0)$ b) $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(3, 6)$.
8. Na hridi se nalazi svjetionik (označen slovom S na karti). Pri normalnim uvjetima vidljivost svjetla svjetionika je 6 milja ($6 M$).
- a) Vidi li se svjetlo svjetionika s pozicija A i B u uvjetima normalne vidljivosti?
 b) Vidi li se svjetlo svjetionika s pozicija A i B u uvjetima otežane vidljivosti kad je vidljivost dvostruko manja nego u normalnim uvjetima?



9. Zemljište je četverokutnog oblika, a vrhovi imaju koordinate $A(43^\circ 45' 50.2'', 15^\circ 48' 54.6'')$, $B(43^\circ 45' 50.7'', 15^\circ 48' 55'')$, $C(43^\circ 45' 50.6'', 15^\circ 48' 56.5'')$, $D(43^\circ 45' 50.4'', 15^\circ 48' 57'')$.



Koordinatni sustav postavljen je tako da je ishodište u točki $O(43^\circ 45' 50'', 15^\circ 48' 54'')$.

Jednoj minuti u smjeru x -osi odgovara 31 m, a jednoj minuti u smjeru y -osi 22 m.

Izračunaj koordinate točaka u metrima, a onda izračunaj koliko dugu ogradu treba napraviti oko tog zemljišta.