Koordinatni sustav

1.

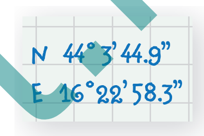
Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

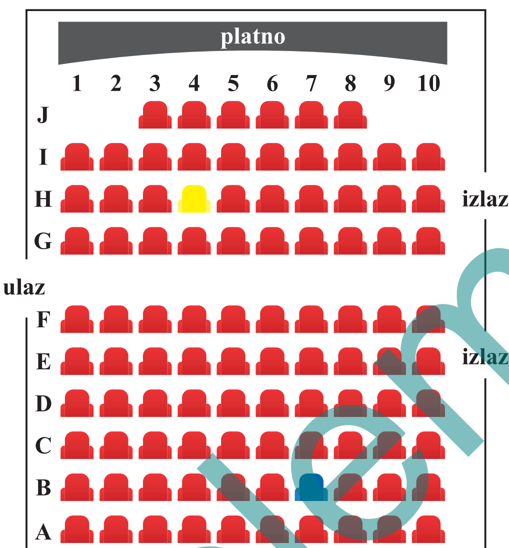
- opisati koordinatni sustav u ravnini
- u koordinatnom sustavu nacrtati točku zadanu koordinatama
- očitati koordinate nacrtane točke
- nacrtati dužine i likove čiji su vrhovi zadani koordinatama
- odrediti koordinate vrhova zadanog lika
- izračunati duljinu dužine
- izračunati koordinate polovišta dužine
- povezati pojedine sadržaje i primijeniti ih pri rješavanju geometrijskih zadataka, problema iz struke i svakodnevnog života.

1.1. Osnovno o koordinatnom sustavu

Tražeći podatke za referat o najvišim planinskim vrhovima Hrvatske, Mario je na internetu pronašao da je Dinara najviši vrh Hrvatske, u narodu zvan i Sinjal, te da je visok 1831 m.

Uz to, pronašao je i njegove geografske koordinate koje iznose: N $44°3'44.9''$ (geografska širina) i E $16°22'58.3''$ (geografska dužina). S pomoću uređenog para (geografska širina, geografska dužina) položaj svake točke na Zemaljskoj kugli je precizno uređen.





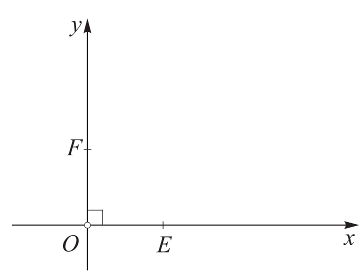
Drugi primjer označavanja pozicije s pomoću uređenih parova uobičajen je pri rasporedu mjesta u kinodvoranama, kazalištima i koncertnim dvoranama i drugdje.

Na slici je prikazan plan jedne kinodvorane i na njemu je plavom bojom označeno sjedalo broj 7 u redu B, te žutom bojom sjedalo broj 4 u redu H.

Uz dogovor da se oznaka reda stavlja na prvo mjesto, a broj sjedala na drugo mjesto, spomenuta dva sjedala imaju koordinate $(\mathrm{B}, 7)$ i $(\mathrm{H}, 4)$.

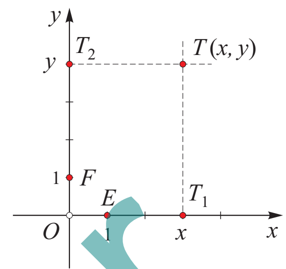
Ovdje ćemo detaljno proučiti koordinatni sustav u kojem su obje koordinate brojevi.

Neka su x i y dva međusobno okomita pravca sa sjecištem u točki O i neka su E i F jedinične točke na pravcima x i y. Uređena trojka (O, x, y) naziva se pravokutni ili Kartezijev **koordinatni sustav u ravnini**. Točka O naziva se ishodište; za pravac x koristimo nazive apscisna os, os apscisa, prva koordinatna os ili kratko, x-os, dok se pravac y naziva ordinatna os, os ordinata, druga koordinatna os ili y-os.



Uređenu trojku (O, x, y) pri čemu su x i y okomiti brojevni pravci sa zajedničkim ishodištem nazivamo pravokutnim koordinatnim sustavom u ravnini.

Pokažimo kako u koordinatnom sustavu prikazati uređeni par brojeva. Neka je (x, y) dani uređeni par.



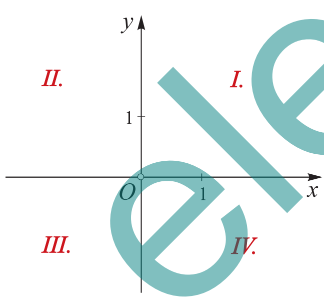
- Na x-osi odaberemo točku T_1 koja je pridružena broju x. Kroz T_1 povučemo pravac usporedan s y-osi.
- Na y-osi odaberemo točku T_2 koja je pridružena broju y. Kroz točku T_2 povučemo usporedni pravac s x-osi.
- Nacrtani se pravci sijeku u točki T koja je pridružena uređenom paru (x, y).

Na taj način svakom uređenom paru (x, y) pridružujemo jednu točku T. Broj x naziva se **apscisa** točke T ili prva koordinata točke T. Broj y naziva se **ordinata** točke T ili druga koordinata točke T. Jednim imenom brojeve x i y nazivamo **koordinatama** točke T i označavamo: $T(x, y)$.

Ovo je pridruživanje obostrano. Naime, svakoj točki T u ravnini crtanjem pravaca usporednih s x-osi i y-osi pronalazimo brojeve x i y na osima koji čine uređeni par (x, y).

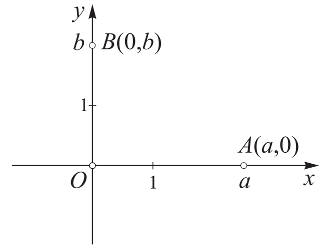
Povijesno gledano, prvi je ideju koordinatnog sustava detaljno razradio francuski matematičar, fizičar i filozof René Descartes (1596. – 1650.). Prema njegovom latiniziranom imenu Cartesius danas koordinatne sustave nazivamo i Kartezijevim koordinatnim sustavima.

Koordinatne osi ravninu dijele na četiri područja koja se nazivaju **kvadranti**.



kvadrant	I.	II.	III.	IV.
vrsta predznaka u točki	$(+,+)$	$(-,+)$	$(-,-)$	$(+,-)$

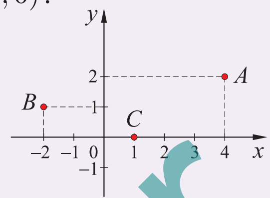
U prvom kvadrantu nalaze se točke kojima su obje koordinate pozitivne, u drugom kvadrantu apscisa točke je negativan, a ordinata pozitivan broj. Obje koordinate točaka u III. kvadrantu su negativni brojevi, dok je apscisa točke četvrtog kvadranta pozitivna, a ordinata negativna.



Točke na x-osi imaju drugu koordinatu jednaku 0, dok točke na y-osi imaju prvu koordinatu jednaku 0. Koordinate ishodišta su $(0, 0)$.

Primjer 1.

Nacrtajmo u koordinatnoj ravnini točke $A(4,2)$, $B(-2,1)$, $C(1,0)$.

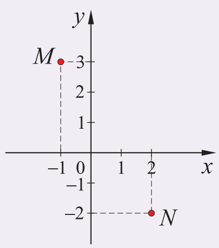


Nacrtajmo točku A. Kroz točku 4 na x-osi nacrtajmo paralelu s y-osi, a kroz točku 2 na y-osi nacrtajmo paralelu s x-osi. Njihovo sjecište je točka A.
Slično se postupi i za B.
Točka C ima drugu koordinatu 0, pa se nalazi na x-osi.

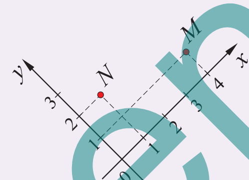
Primjer 2.

Očitajmo koordinate točaka M i N.

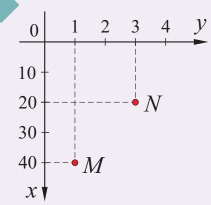
a)



b)



c)

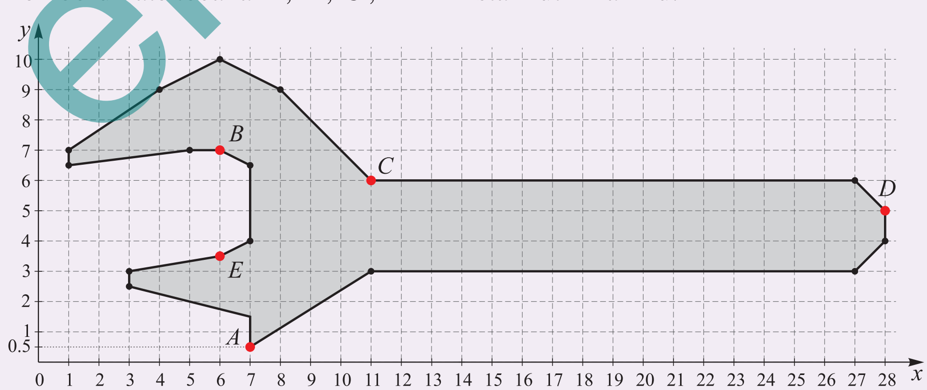


a) $M(-1,3)$, $N(2,-2)$ **b)** $M(4,1)$, $N(1,2)$ **c)** $M(40,1)$, $N(20,3)$.

Uočimo da su u **b)** i **c)** podzadatku koordinatne osi u drukčijem položaju nego što smo objasnili u uvodu ove teme. Ovisno o različitim situacijama u primjeru koristimo se različitim položajima osi, a niti jedinične dužine ne moraju biti jednake kao što vidimo u **c)** podzadatku.

Primjer 3.

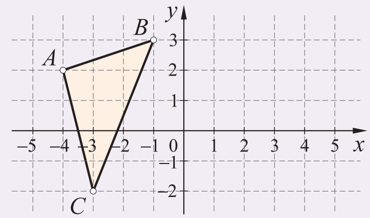
Odredimo koordinate točaka A, B, C, D i E istaknutih na liku.



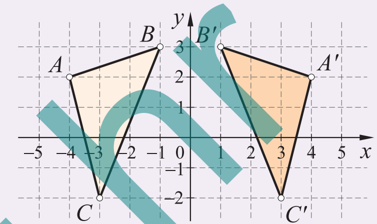
$A(7,0.5)$, $B(6,7)$, $C(11,6)$, $D(28,5)$, $E(6,3.5)$.

Primjer 4.

Odredimo koordinate trokuta na slici. Zatim ga preslikajmo osnom simetrijom s obzirom na y-os i odredimo koordinate vrhova osnosimetrične slike trokuta.



Koordinate su $A(-4,2)$, $B(-1,3)$, $C(-3,-2)$. Os simetrije je y-os, pa iz vrha A povučemo okomicu na y-os i na njoj odredimo točku A' koja je od y-osi udaljena za 4, tj. za isto onoliko koliko je A udaljena od y-osi. Slično se postupa i za točke B i C pa je $A'(4,2)$, $B'(1,3)$, $C'(3,-2)$.



ZADATCI 1.1.

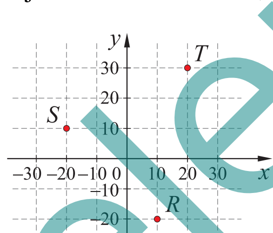
1. Nacrtaj u koordinatnoj ravnini zadane točke: $A(0,5)$, $B(-2,0)$, $C(-1,3)$, $D(4,-2)$, $E(1,-1)$, $F(-3,-2)$, $G(3,2)$. U kojim se kvadrantima ili na kojim se osima nalaze zadane točke?

2. Nacrtaj u koordinatnoj ravnini točke $M(0.2, 0.8)$, $N(-0.7, 1.1)$, $K\left(0.6, -\frac{1}{2}\right)$ ako su duljine jediničnih dužina na koordinatnim osima:

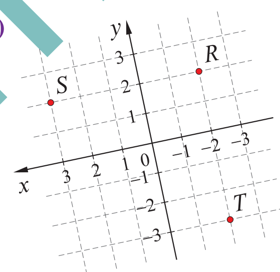
a) 1 cm **b)** 2 cm **c)** 25 mm.

3. Očitaj koordinate točaka S, R i T.

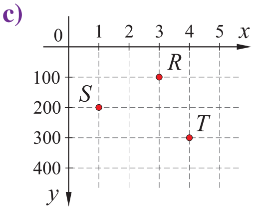
a)



b)

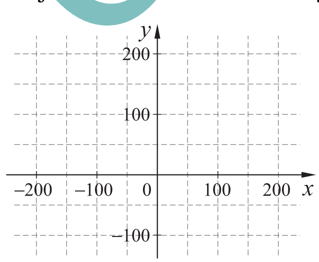


c)



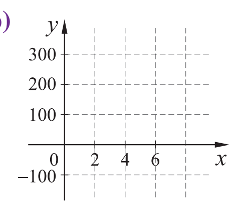
4. Nacrtaj koordinatne sustave u bilježnicu i u njih ucrtaj zadane točke P, R, S.

a)



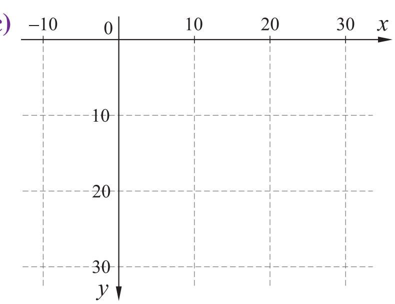
$P(200,100)$, $R(50,-100)$, $S(-150,150)$

b)



$P(4,200)$, $R(3,100)$, $S(6,150)$

c)



$P(10,30)$, $R(-5,20)$, $S(25,12)$

5. U koordinatnim sustavima s pogodno odabranim jediničnim točkama nacrtaj zadane točke:

a) $A(20, 30)$, $B(-20, 10)$, $C(-15, 15)$ **b)** $A(150, 200)$, $B(400, 330)$, $C(-200, 110)$

c) $A(1, 200)$, $B(-2, 100)$, $C(3, 300)$.

6. Očitaj koordinate svih vrhova lika iz primjera 3.

7. U koordinatnom sustavu ucrtaj i redom spoji ove točke: $(6,0)$, $(6,2)$, $(5,4)$, $(4,5)$, $(2,6)$, $(0,6)$, $(-2,6)$, $(-4,5)$, $(-5,4)$, $(-6,2)$, $(-6,0)$, $(-6,-2)$, $(-5,-4)$, $(-4,-5)$, $(-2,-6)$, $(6,-6)$, $(2,-6)$, $(4,-5)$, $(5,-4)$, $(6,-2)$, $(6,0)$. Zatim ucrtaj i redom spoji ove točke: $(2,0)$, $(3,0)$, $(3.5,1)$, $(3.5,2)$, $(3,3)$, $(2,3)$, $(1.5,2)$, $(2,0)$. Ucrtaj i spoji sljedeće točke: $(-3,0)$, $(-2,0)$, $(-1.5,1)$, $(-1.5,2)$, $(-2,3)$, $(-3,3)$, $(-3.5,2)$, $(-3.5,1)$, $(-3,0)$. Konačno, ucrtaj i spoji točke: $(-3.5,-2)$, $(-3,-3)$, $(-2,-4)$, $(-1,-4.5)$, $(1,-4.5)$, $(2,-4)$, $(3,-3)$, $(3.5,2)$. Opiši lik koji si dobio.

8. Nacrtaj točke $A(2,3)$, $B(-2,-4)$, $C(3,-1)$ i njima simetrične točke s obzirom na:

a) x-os **b)** y-os.

U kojim se kvadrantima nalaze točke A, B, C?

9. **a)** Napiši četiri točke koje pripadaju II. kvadrantu.

b) Napiši tri točke koje pripadaju IV. kvadrantu.

c) Napiši dvije točke koje pripadaju y-osi.

10. Koja od sljedećih rečenica je istinita? Obrazloži.

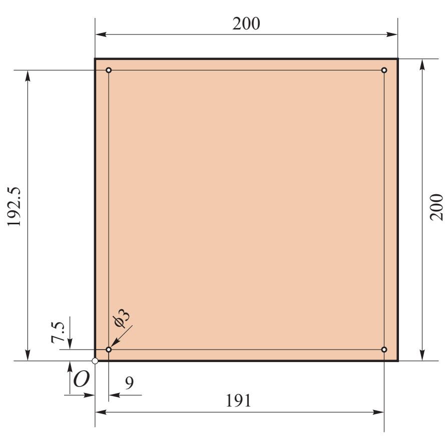
a) Ako točka ima pozitivnu prvu koordinatu, tada ona pripada prvom kvadrantu.

b) Sve točke iz četvrtog kvadranta imaju pozitivne apscise.

c) Ako točka ima ordinatu jednaku 0, ona pripada ordinatnoj osi.

11. Dan je jedan dio zemljopisne karte. Odredi približne koordinate ovih mjesta: Sv. Ivan Zelina, Dugo Selo, Velika Gorica, Ježevo, Brckovljani, Kašina, Mraclin. Zadnju znamenku minuta zaokruži na 0 ili 5. Koje naselje je najbliže točki s koordinatama $(45°55', 16°5')$?

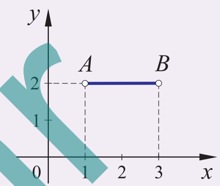
12. U drvenoj ploči dimenzija $200\,\text{mm} \times 200\,\text{mm}$ treba izbušiti četiri rupe prema danom nacrtu. Odredi koordinate središta rupa. Ishodište sustava postavi u lijevi donji kut ploče, a bridovi ploče neka leže na koordinatnim osima.



1.2. Udaljenost točaka u ravnini

Primjer 1.

Izračunajmo udaljenost točaka $A(1,2)$ i $B(3,2)$.



Točke A i B imaju jednake ordinate pa je dužina $\overline{AB}$ paralelna s apscisnom osi. Stoga su točke A i B udaljene upravo onoliko koliko su njihove apscise udaljene na x-osi, tj.

$$|AB| = 3 - 1 = 2.$$

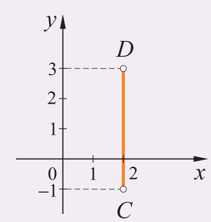
Općenito, ako je dužina $\overline{AB}$ paralelna s apscisnom osi, tada je udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_1)$ jednaka

$$|AB| = |x_2 - x_1|.$$

U formuli $|x_2 - x_1|$ koristimo se apsolutnom vrijednosti kako bismo uvijek za udaljenost dobili nenegativan broj bez obzira je li x_2 veće ili manje od x_1.

Primjer 2.

Izračunajmo duljinu dužine $\overline{CD}$ ako je $C(2,-1)$ i $D(2,3)$.



Točke C i D imaju jednake apscise pa je dužina $\overline{CD}$ paralelna s ordinatnom osi. Stoga su točke C i D udaljene upravo onoliko koliko su njihove ordinate udaljene od y-osi, tj.

$$|CD| = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4.$$

Općenito, duljina dužine $\overline{CD}$, $C(x_1, y_1)$, $D(x_1, y_2)$ koja je paralelna s y-osi jednaka je

$$|CD| = |y_2 - y_1|.$$

Primjer 3.

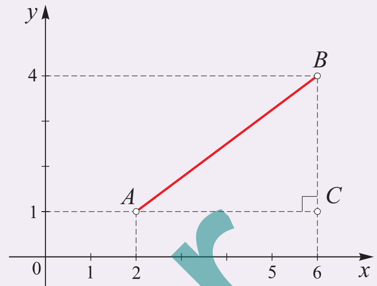
Izračunajmo udaljenost točaka $A(2,1)$, $B(6,4)$.

Neka je C presjek paralele kroz točku A s x-osi i paralele kroz točku B s y-osi. Trokut ABC je pravokutan. Tada je

$$|AC| = |6 - 2| = 4$$
$$|BC| = |4 - 1| = 3.$$

Primjenom Pitagorina poučka na trokut ABC imamo

$$\begin{aligned}|AB| &= \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}\\ &= \sqrt{4^2 + 3^2}\\ &= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.\end{aligned}$$



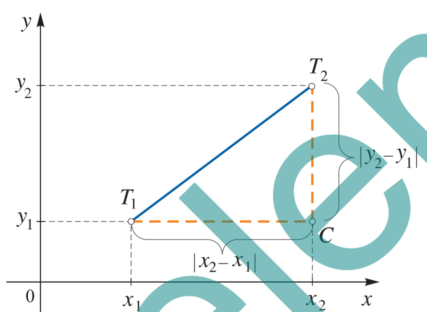
Postupak koji smo u ovom primjeru primijenili, iskoristit ćemo za dokaz formule za izračunavanje udaljenosti dviju točaka u ravnini, a koja glasi ovako:

Udaljenost dviju točaka

Neka su $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ dvije točke ravnine. Tada je udaljenost točaka T_1 i T_2 dana s

$$|T_1T_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Dokaz.



Promotrimo slučaj kad dužina $\overline{T_1T_2}$ nije paralelna ni s jednom koordinatnom osi.

Uočimo na slici pravokutni trokut T_1CT_2. Dužina $\overline{T_1T_2}$ je njegova hipotenuza pa vrijedi

$$\begin{aligned}|T_1T_2|^2 &= |T_1C|^2 + |T_2C|^2\\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,\end{aligned}$$

tj.

$$|T_1T_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \blacktriangleleft$$

Ako je dužina $\overline{T_1T_2}$ paralelna s x-osi, tj. ako je $y_1 = y_2$, tada uvrštavanjem koordinata u formulu dobivamo:

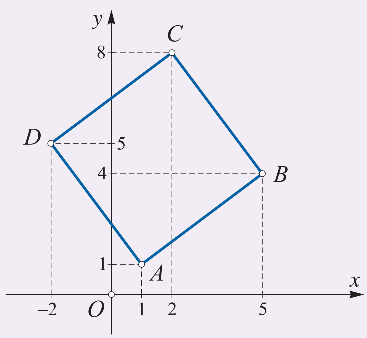
$$\begin{aligned}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0}\\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|,\end{aligned}$$

što je upravo formula za udaljenost dviju točaka koju smo imali u primjeru 1. Slično se pokaže da se i u slučaju kad je dužina $\overline{T_1T_2}$ paralelna s y-osi formula za $|T_1T_2|$ podudara s onom iz primjera 2. Drugim riječima, formula $|T_1T_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ vrijedi za sve položaje točaka T_1 i T_2.

Primjer 4.

Dokažimo da je četverokut $ABCD$, $A(1,1)$, $B(5,4)$, $C(2,8)$, $D(-2,5)$ kvadrat. Izračunajmo opseg četverokuta $ABCD$. **Opseg** nekog lika je zbroj duljina svih njegovih stranica.

Trebamo provjeriti jesu li sve stranice jednakih duljina i jesu li duljine dijagonala jednake jer su to karakteristična svojstva kvadrata.



$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5$$
$$|BC| = \sqrt{(2-5)^2 + (8-4)^2} = 5$$
$$|CD| = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-8)^2} = 5$$
$$|DA| = \sqrt{(1+2)^2 + (1-5)^2} = 5$$
$$|AC| = \sqrt{(2-1)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$|BD| = \sqrt{(-2-5)^2 + (5-4)^2} = 5\sqrt{2}$$

Slijedi da je četverokut $ABCD$ kvadrat.

Opseg četverokuta $ABCD$ je $o = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 4 \cdot 5 = 20$.

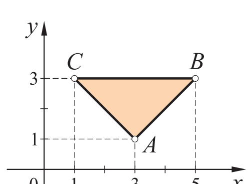
ZADATCI 1.2.

1. Izračunaj $|AB|$ ako je:
a) $A(1,2)$, $B(4,6)$ **b)** $A(7,6)$, $B(1,-2)$ **c)** $A(-1,-3)$, $B(14,5)$ **d)** $A(1,1)$, $B(4,4)$.

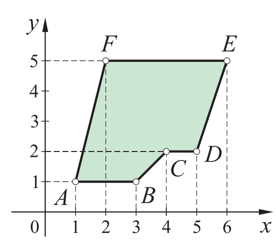
2. Izračunaj $|CD|$ ako je:
a) $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $D(1,1)$ **b)** $C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $D(0,2)$ **c)** $C(0,0)$, $D(3,1)$ **d)** $C\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $D\left(\frac{1}{3}, \frac{9}{3}\right)$.

3. Izračunaj duljine svih stranica likova nacrtanih u koordinatnom sustavu i zbroji ih, tj. izračunaj opseg tih likova. U **c)** zadatku rezultat prikaži u decimalnom obliku na dvije decimale.

a)



b)



c)