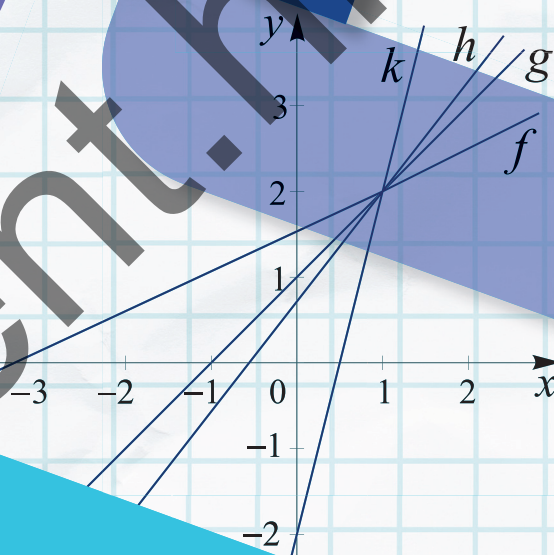


Linearna funkcija

1.



Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- izračunati vrijednost linearne funkcije za zadani argument i obratno
- nacrtati graf linearne funkcije s pomoću tablice vrijednosti
- odrediti pravilo pridruživanja linearne funkcije zadane grafom
- s pomoću grafa funkcije ili pravila pridruživanja odrediti pad ili rast funkcije i nul-točku
- primijeniti linearnu funkciju pri opisivanju ovisnosti dviju veličina u jednostavnijim problemima iz svakodnevnog života i struke.

1.1. Funkcije

Skupovi

Pri opisivanju funkcija pojavljuju se razni pojmovi i simboli povezani s pojmom skupa.

Skup je osnovni matematički pojam koji se ne definira. Sastoji se od elemenata koji imaju neko zajedničko svojstvo ili obilježje.

Neki primjeri skupova:

- skup učenika naše škole
- skup igrača nogometne reprezentacije Hrvatske 2026. godine
- skup svih tvojih kućnih ljubimaca
- skup svih otvornika (samoglasnika)
- skup dvoznamenkastih brojeva.

Skupove možemo prikazati:

- zapisivanjem svih različitih elemenata koji pripadaju tom skupu pri čemu redoslijed zapisivanja nije važan
- zapisivanjem svojstva koje imaju svi elementi tog skupa
- grafički s pomoću **Vennovih dijagrama** (to su zatvorene ovalne linije) unutar kojih su popisani svi elementi skupa.

Primjer 1.

Prikažimo skup neparnih prirodnih dvoznamenkastih brojeva manjih od 26 na sva tri načina.

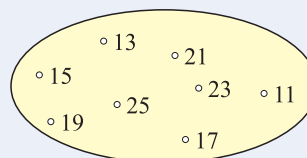
Promatrani skup označit ćemo sa S i prvo prikazati s pomoću vitičastih zagrada unutar kojih zapisujemo sve elemente skupa:

$$S = \{11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25\}.$$

Zapis s pomoću svojstva izgleda ovako:

$$S = \{x : x \text{ je neparni dvoznamenkasti broj, } x < 26\}.$$

Desno je prikaz s pomoću Vennova dijagrama.



Zadržimo se još na prvom primjeru. Želimo li s pomoću simbola zapisati činjenicu da je broj 15 element skupa S , pišemo ovako:

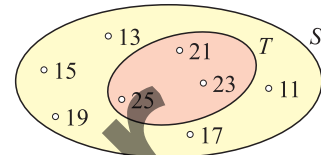
$$15 \in S$$

(čitamo petnaest je element skupa S ili petnaest pripada skupu S).

Primjerice, broj 101 nije element skupa S i pišemo ovako:

$$101 \notin S.$$

Promotrimo skup $T = \{21, 23, 25\}$. Svi elementi skupa T ujedno su i elementi skupa S , tj. skup T sadržan je u skupu S . Tada kažemo da je T **podskup** skupa S i pišemo $T \subseteq S$.



Kad želimo naglasiti da je T podskup skupa S , ali T i S nisu jednaki, tada kažemo da je T **pravi podskup** od S i pišemo $T \subset S$.

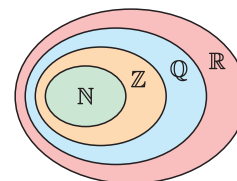
Skup koji nema elemenata naziva se **prazan skup** i označava se s \emptyset ili $\{\}$. Po dogovoru podrazumijevamo da je prazan skup \emptyset podskup svakog skupa.

Ponajviše nas zanimaju skupovi brojeva. O svim tim skupovima brojeva učili smo u osnovnoj školi pa ćemo sada samo ponoviti njihove nazive, oznake i međusobne odnose.

naziv skupa	oznaka	primjeri elemenata tog skupa
skup prirodnih brojeva	\mathbb{N}	1, 2, 3, 4, 5...
skup cijelih brojeva	\mathbb{Z}	-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4...
skup racionalnih brojeva	\mathbb{Q}	$-\frac{5}{3}$, $-\frac{1}{10}$, -4, 0, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{28}{11}$, 0.23, -14.6... Brojevi su oblika $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Decimalni zapis im je ili konačan (npr. 0.42) ili beskonačan i periodičan (npr. $28.444\dots = 28.\dot{4}$).
skup realnih brojeva	\mathbb{R}	Elementi ovog skupa su svi racionalni brojevi i svi brojevi čiji je decimalni zapis beskonačan neperiodičan (npr. 53.123456...). Elementi skupa \mathbb{R} su i svi korijeni (npr. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{101}$), njihove kombinacije (npr. $2\sqrt{2} - 11\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{29} + 1$). Broj π pripada \mathbb{R} .

Između tih skupova vrijedi odnos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



Intervali

Uvedimo oznake za neke posebne podskupove skupa realnih brojeva.

Ako su a i $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tada se skup svih realnih brojeva manjih od b , a većih od a naziva **otvoreni** interval i označava se s $\langle a, b \rangle$. Znači,

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Skup svih brojeva koji su veći ili jednaki a , a manji ili jednaki b naziva se **zatvoreni** interval i označava se s $[a, b]$. Znači,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Interval **poluotvoren zdesna** je skup

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

Interval **poluotvoren slijeva** je skup

$$\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Skup svih realnih brojeva manjih od a označava se s $\langle -\infty, a \rangle$ i također se naziva otvoreni interval. Znači,

$$\langle -\infty, a \rangle = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.$$

Znak ∞ čita se beskonačno, a znak $-\infty$ čita se minus beskonačno.

Analogno tomu, skup $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ označava se s $\langle a, \infty \rangle$.

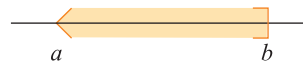
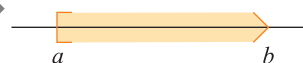
Također vrijedi:

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \quad \langle -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}.$$

Na lijevoj slici nacrtan je interval $\langle -\infty, a]$, a na desnoj $[a, \infty)$.



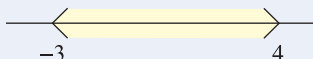
Na brojevnom pravcu otvoreni interval crtamo ovako.



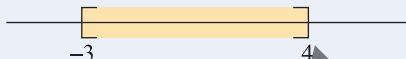
Primjer 2.

Opišimo i nacrtajmo intervale $\langle -3, 4 \rangle$ i $[-3, 4]$.

Interval $\langle -3, 4 \rangle$ sadržava sve brojeve koji su veći od -3 , a manji od 4 , tj. $-3 < x < 4$. Ovaj interval ne sadržava brojeve -3 i 4 .



Interval $[-3, 4]$ sadržava sve brojeve koji su veći ili jednaki -3 , a manji ili jednaki 4 , tj. $-3 \leq x \leq 4$. Iznimno, brojevi -3 i 4 nalaze se u tom intervalu.

**Primjer 3.**

S pomoću simbola za intervale zapišimo sljedeće skupove i skicirajmo ih na brojevnom pravcu:

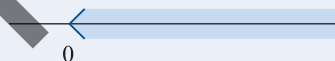
a) $\{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x < -2.5\}$

b) skup svih pozitivnih brojeva.

a) Radi se o intervalu $[-4, -2.5)$, a na brojevnom pravcu ga prikazujemo ovako:

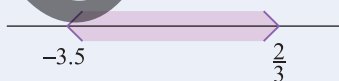


b) To je $\langle 0, \infty \rangle$.

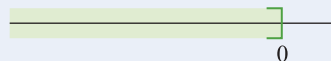
**Primjer 4.**

Nacrtane skupove zapišimo s pomoću simbola za intervale.

a)



b)

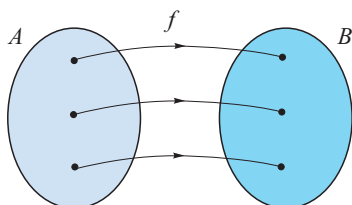


a) Prikazani interval je $\langle -3.5, \frac{2}{3} \rangle$. On sadrži sve realne brojeve x za koje vrijedi $-3.5 < x < \frac{2}{3}$.

b) Interval je $\langle -\infty, 0] \rangle$. Sadrži nulu i sve negativne brojeve.

Funkcije

Da bismo definirali funkciju potrebna su dva neprazna skupa i pravilo pridruživanja, odnosno preslikavanja elemenata polaznog skupa na elemente dolaznog skupa.



Primjerice, neka je skup A skup učenika 2. a razreda naše škole, a skup B skup stolaca u njihovoj učionici. Pravilo pridruživanja podrazumijeva da svaki učenik sjedi na jednom stolcu. Sada možemo reći da između elemenata skupova A i B postoji pridruživanje i pišemo

$$f : A \rightarrow B$$

(čitamo: ef sa A u B).

Svaki učenik treba sjediti na jednom stolcu i nitko ne smije stajati. Ako bi samo jedan učenik morao stajati, tada preslikavanje “sjediti” nije dobro definirano i nije funkcija.

U matematici ćemo umjesto s učenicima i stolicama sve prikazivati brojkama i slovima, ali pravila ostaju ista.

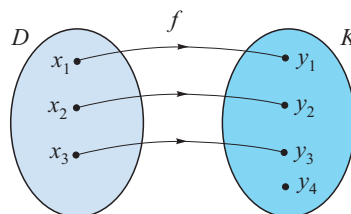
Funkcija

Funkcija je preslikavanje po kojem svakom elementu polaznog skupa pridružujemo jedan jedini element drugog skupa.

Domena i kodomena, originali i slike

$$f : D \rightarrow K$$

sjediti : učenici \rightarrow stolci



U našem primjeru s 2. a razredom svakom učeniku pridružujemo jedan stolac, tj. učeniku x_1 pridružujemo stolac y_1 , učeniku x_2 pridružujemo stolac y_2 itd. Pišemo $x_1 \mapsto y_1$, $x_2 \mapsto y_2$ itd. ili $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ itd.

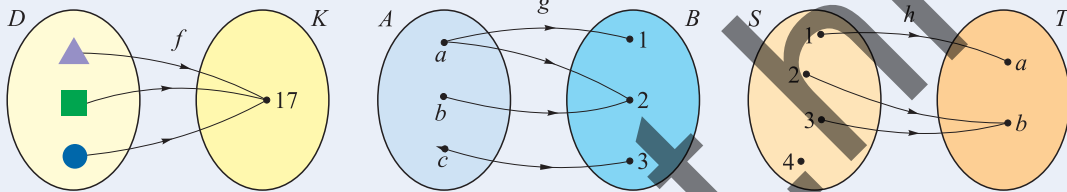
Polazni skup zovemo **domena** i to je skup svih učenika u razredu koji se sad nazivaju **originali** i oni su elementi polaznog skupa.

Drugi skup naziva se **kodomena**. On sadrži sve elemente $f(x_1), f(x_2), f(x_3) \dots$ koje nazivamo **slike** ili **vrijednosti funkcije**, ali može sadržavati i neke dodatne elemente. U našem primjeru to je skup svih stolaca u učionici.

Uobičajeno je da originale prikazujemo slovom x , a njihove slike označavamo s $f(x)$.

Primjer 5.

Koji od zadanih Vennovih dijagrama prikazuju funkciju?



Prvi dijagram je dijagram funkcije dok drugi i treći nisu. Drugi dijagram ne prikazuje funkciju jer se element a preslikava u dva elementa: 1 i 2. Treći dijagram ne prikazuje funkciju jer element 4 iz domene nije preslikan niti u jedan element kodomene.

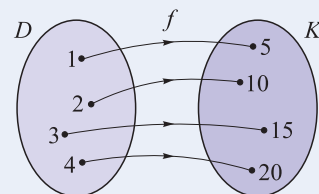
Prikazi funkcija

Funkcije možemo prikazati na više načina:

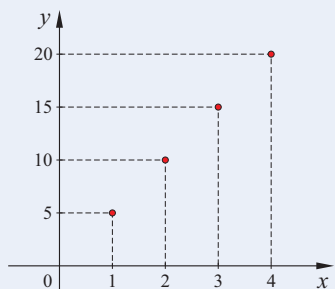
- Vennovim dijagramom (skupovno)
- riječima (opisno)
- formulom (algebarski)
- tablicom (aritmetički)
- grafom (geometrijski).

Primjer 6.

S pomoću Vennova dijagrama prikazana je funkcija f . Opišimo riječima njezino djelovanje, zapišimo joj formulu, napravimo tablicu vrijednosti i prikazimo ju grafom.



Funkcija f svakom elementu skupa $D = \{1, 2, 3, 4\}$ pridružuje jedan element skupa $K = \{5, 10, 15, 20\}$ tako da se original poveća pet puta.



Formula koja opisuje djelovanje funkcije glasi:

$$f(x) = 5x.$$

Tablica vrijednosti je

x	1	2	3	4
$f(x)$	5	10	15	20

a graf je prikazan na slici lijevo.

U svakodnevnom životu i radu često se povezuju po dvije promatrane veličine, primjerice:

- vrijeme i temperatura
- visina biljke i broj dana rasta
- masa životinje i količina hrane
- količina sastojaka i masa smjese.

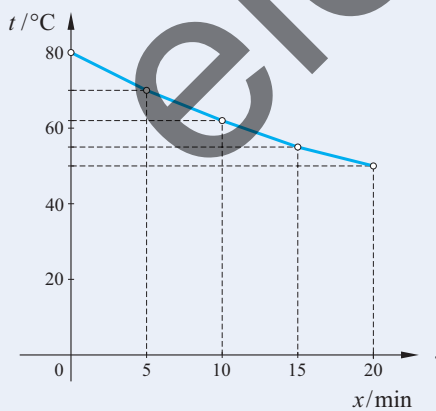
Primjer 7.

Pad temperature u rashlađivaču. Izmjerene vrijednosti temperature juhe u rashlađivaču dane su u tablici.

vrijeme u minutama	0	5	10	15	20
temperatura u °C	80	70	62	55	50

Iz primjera vidimo da se temperatura mijenja kako vrijeme raste što znači da je temperatura funkcija vremena.

Grafički prikaz zadane funkcije:



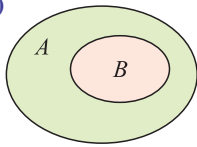
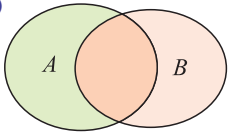
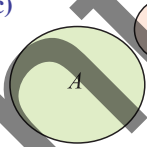
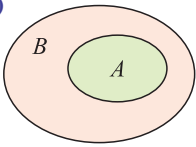
Graf nam pokazuje kako se funkcija vremenom mijenja.

Na x -os ucrtamo vrijeme, a na y -os temperaturu.

U koordinatni sustav ucrtamo točke iz tablice koje spojimo i dobijemo graf zadane funkcije.

U primjeru nije zadana domena niti kodomena pa njih odredimo tako da funkcija ima smisla. Primjerice, za vrijeme x prirodno je uzeti pozitivan broj ili 0, tj. domena je $\{x : x \geq 0\}$ što kraće pišemo $[0, \infty)$. Temperatura može biti realni broj pa se za kodomenu može uzeti skup \mathbb{R} , tj. pišemo $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

ZADATCI 1.1.

1. Zapisivanjem svih elemenata napiši skup:
 a) svih godišnjih doba b) svih dvoznamenkastih brojeva većih od 14 i manjih od 20.
2. Vennovim dijagramom prikaži:
 a) skup svih dana u tjednu b) skup troznamenkastih brojeva koji završavaju na 45.
3. Sljedeći skup zapiši tako da navedeš sve njegove elemente:
 a) $A = \{x : x \text{ je mjesec koji počinje slovom } s\}$
 b) $B = \{n : n \text{ je slovo u riječi JAGODA}\}$
 c) $C = \{y : y \text{ je prirodni parni broj manji od } 10\}$.
4. Koji crtež prikazuje $A \subseteq B$?
 a)  b)  c)  d) 
5. Ako su zadani skupovi $A = \{1, 2, 5, 15, 25\}$ i $B = \{15, 25, 30\}$, odredi koje su od navedenih tvrdnja istinite.
 a) $5 \in A$ b) $15 \in B$ c) $25 \notin B$ d) $14 \notin B$
 e) $2 \subseteq A$ f) $\{15, 30\} \subseteq B$ g) $\emptyset \subseteq A$ h) $3 \subseteq A$
6. Zadani su skupovi $A = \{13, 15, 16\}$, $B = \{0, 6, 8\}$, $C = \{6\}$. Koji od znakova \in , \notin , \subseteq treba upisati u kvadratić da tvrdnja bude istinita?
 a) $15 \square A$ b) $16 \square B$ c) $\{8\} \square B$ d) $\{13, 16\} \square A$
 e) $13 \square C$ f) $11 \square C$ g) $C \square B$ h) $\emptyset \square A$
7. Zadani su skupovi $A = \{10, 20, 30, 40\}$ i $B = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$. Koja je tvrdnja istinita?
 a) $10 \in A$ b) $15 \notin B$ c) $15 \in A$ d) $A \subseteq B$ e) $B \subseteq A$
8. Koje su tvrdnje istinite?
 a) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ b) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$ c) $\{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{R}$ d) $\{14, 14.4, 14.44\} \subseteq \mathbb{Z}$
9. Koje su tvrdnje istinite?
 a) $231 \in \mathbb{N}$ b) $-1001 \in \mathbb{N}$ c) $2026 \in \mathbb{Q}$ d) $0.458 \in \mathbb{Z}$
 e) $\frac{23}{4} \in \mathbb{N}$ f) $-\frac{160}{5} \in \mathbb{Z}$ g) $\sqrt{2} + 1 \in \mathbb{R}$ h) $8 - 3\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$