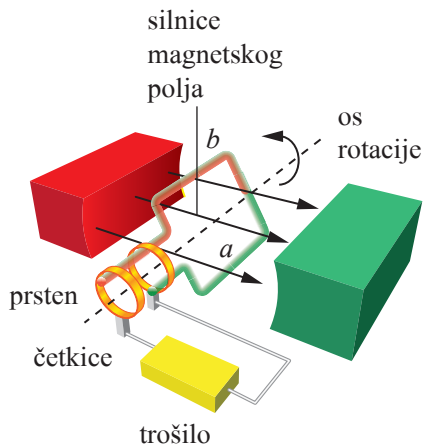


# 1.

## Izmjenični električni strujni krugovi i prijelazne pojave

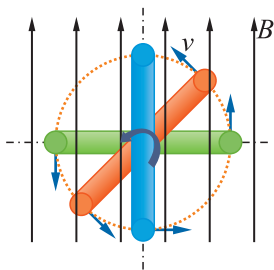
### U ovom poglavlju ostvarit ćeš sljedeće ishode učenja (SIU 5469):

- ispitati svojstva pasivnih komponenata u izmjeničnom električnom strujnom krugu, u simulacijskom programu i/ili u stvarnim uvjetima
- objasniti međusobnu ovisnost električnih veličina u serijskom i paralelnom RLC krugu i utjecaj rezonantne frekvencije na spoj
- primijeniti kompleksni račun za izračunavanje električnih veličina u izmjeničnim električnim strujnim krugovima
- analizirati prijelazne pojave u RLC krugovima te odziv RC, CR, RL i LR mreže na različite oblike napona u simulacijskom programu i/ili u stvarnim uvjetima
- izraditi serijski i paralelni krug za zadanu namjenu prema projektnom zadatku.



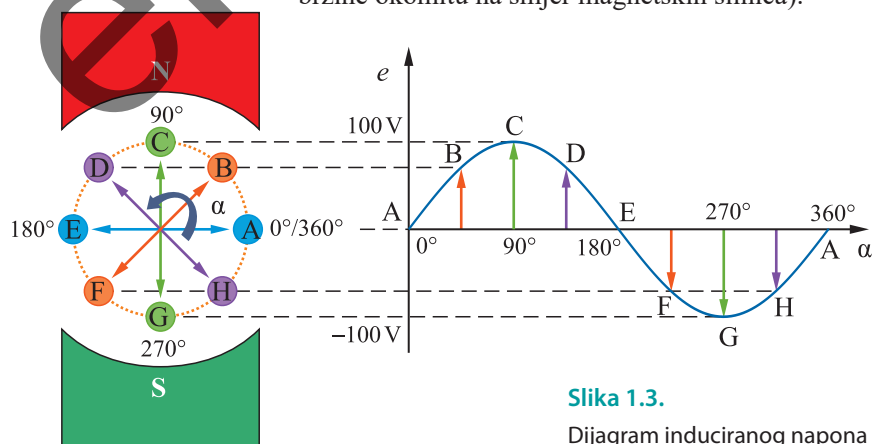
Slika 1.1.

Rotacija petlje u magnetskom polju



Slika 1.2.

Shematski prikaz rotacije petlje u magnetskom polju



Slika 1.3.

Dijagram induciranog napona

## 1.1. Izmjenična sinusna struja i napon

### 1.1.1. Nastanak izmjenične sinusne struje

**Generatori** su rotacijski električni strojevi koji pretvaraju mehaničku energiju u električnu, a rade na načelu elektromagnetske indukcije.

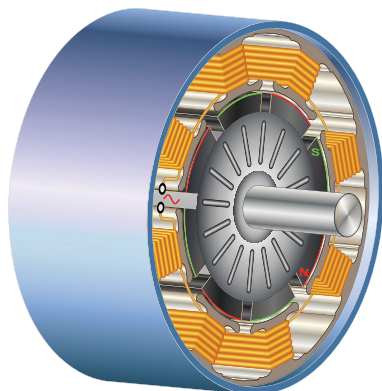
Generatori mogu biti i linearni električni strojevi.

Svaka vodljiva petlja ili zavojnica, koja se okreće u magnetskom polju, može biti generator izmjenične struje. Kod linearnih električnih strojeva radi se o translaciji.

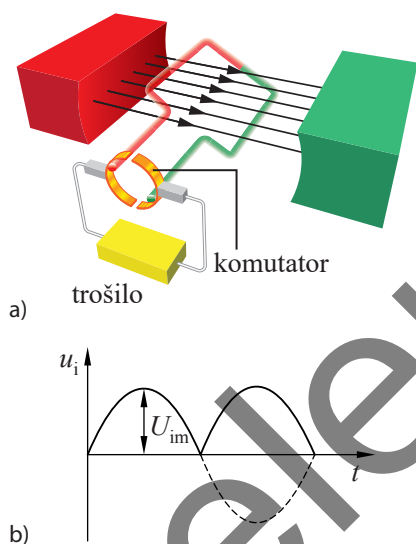
Radi jednostavnosti prikazimo rotaciju petlje od jednog zavoja u homogenom magnetskom polju (slika 1.1). Petlja sa stranicama  $a$  i  $b$  postavljena je u magnetsko polje indukcije  $B$  tako da je os petlje okomita na smjer polja. Krajevi petlje vezani su na međusobno izolirane klizne prstene koji su koncentrično postavljeni na osovinu petlje i rotiraju zajedno s njom, ali su izolirani od osovine. Klizni kontakti (četkice), koji naliježu na prstene, povezuju rotirajuću petlju s vanjskim dijelom električnog kruga (s trošilom).

Tijekom vremena se zbog kružnog gibanja mijenja smjer brzine  $v$  vodiča u odnosu na smjer magnetskih silnica. Na slici 1.2 prikazana su tri položaja petlje tijekom rotacije gdje se vidi promjena smjera brzine  $v$  u odnosu na smjer magnetske indukcije  $B$ . Zbog toga se mijenja iznos i smjer induciranog napona u vodičima  $a$  i  $b$ .

Ranije smo utvrdili da je iznos induciranog napona razmjeran magnetskoj indukciji  $B$ , duljini vodiča  $l$  i brzini  $v$  kojom vodič siječe magnetske silnice,  $e = Blv$ , (pri tome uzimamo u obzir komponentu brzine okomitu na smjer magnetskih silnica).



**Slika 1.4.**  
Shematski prikaz izmjeničnog generatora



**Slika 1.5.**  
a) Ilostsmjerni generator  
b) Ilostsmjerni napon

Svaka stranica petlje tijekom jednog poluokreta giba se ispod jednog pola magneta, a tijekom drugog poluokreta ispod drugog pola.

Inducirani napon prvo ima određeni polaritet, a vrijednost se neprekidno povećava od nule do najveće vrijednosti i zatim se smanjuje do nule; tada napon mijenja polaritet, a vrijednost se opet povećava do maksimalne vrijednosti i zatim se smanjuje do nule i to se ponovno **periodično izmjenjuje** (slika 1.3).

Ako je zatvoren strujni krug, i inducirana struja mijenja smjer.

Budući da su obje stranice ( $a$  i  $b$ ) sastavni dio petlje, njihovi se inducirani naponi potpomažu – obje tjeraju struju u istom smjeru. Smjer struje u vodičima  $a$  i  $b$  određuje se pravilom desne ruke.

U petlji, koja rotira stalnom kutnom brzinom u magnetskom polju, inducira se napon koja se mijenja po sinusnom zakonu tj. inducira se **izmjenični sinusni napon** ili **izmjenična sinusna elektromotorna sila**.

Petlja rotira stalnom kutnom brzinom  $\omega$ , a trenutačni kut  $\alpha$  koji petlja tijekom vremena  $t$  zauzima, razmjeran je kutnoj brzini pa vrijedi:

$$\alpha = \omega t.$$

Matematički izraz za sinusni napon glasi:

$$u = U_m \sin \alpha$$

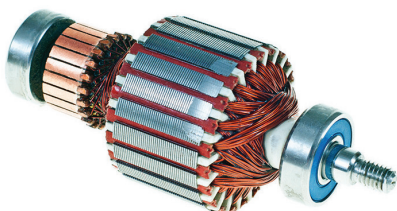
$$u = U_m \sin \omega t$$

gdje je:

- $u$  trenutačna vrijednost napona, V
- $U_m$  maksimalna vrijednost napona, V
- $\alpha$  trenutačni kut
- $\omega$  kutna brzina, rad/s
- $t$  vrijeme, s.

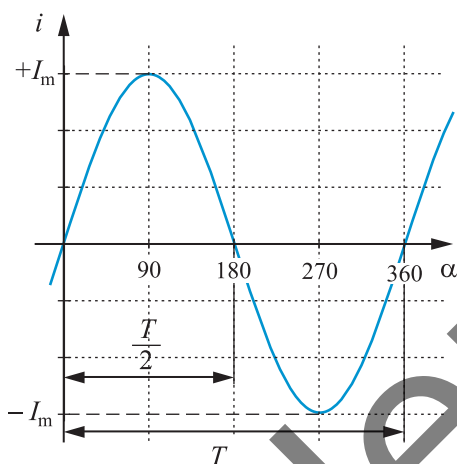
Izmjenični napon nastaje okretanjem petlje u homogenom magnetskom polju i mijenja se po sinusnoj funkciji. Valni oblik izmjeničnog napona je sinusoida. Okvir ima konstantnu brzinu, a inducirani napon periodički mijenja polaritet.

U stvarnom generatoru magnetsko polje stvara rotirajući elektromagnet koji se naziva **rotor**, a zavojnice u kojima se inducira napon položene su u utore ili namotane oko polova mirujućeg dijela stroja koji se naziv stator (slika 1.4).



Slika 1.6.

Kolektor (komutator) na osovini rotora



Slika 1.7.

Izmjenična sinusna struja

### Napomena

Izmjeničnu sinusnu struju u nastavku ćemo nazivati izmjenična struja.

Ugradnjom **mehaničkog ispravljača**, koji se naziva **kolektor** ili **komutator**, na osovinu rotora može se izmjenični generator pretvoriti u istosmjerni (slika 1.5). Kolektor se sastoji od niza kružno postavljenih, međusobno izoliranih bakrenih lamela (slika 1.6). Broj lamela određen je brojem petlji koje rotiraju u magnetskom polju jer se svaki početak i kraj petlje spaja na jednu lamelu. Trošilo se spaja na kolektor jednim parom grafitnih četkica koje klizu po površini kolektora prelazeći s jedne lamele na drugu. Pojedina četkica uvijek dobiva napon istog polariteta zato što u trenutku promjene polariteta napona na jednoj lameli četkica prelazi na drugu na kojoj je napon istog polariteta.

Tako je dobiveni napon istosmjerni pulsirajući kao što prikazuje slika 1.5b.

### 1.1.2. Osnovni pojmovi o izmjeničnoj sinusnoj struji

Poseban značaj u elektrotehnici imaju periodične izmjenične struje i naponi koji se mijenjaju po sinusnom zakonu.

**Izmjenična struja** mijenja jakost i smjer tijekom promatranog vremena.

Izmjenična struja prvo ima određeni smjer u strujnom krugu, njezina vrijednost se neprekidno povećava od nule do najveće vrijednosti i zatim se smanjuje do nule; tada struja mijenja smjer, vrijednost se opet povećava do maksimalne vrijednosti i zatim se smanjuje do nule; kad ponovno mijenja smjer, ima prvotni smjer u krugu, i to se ponovno **periodično mijenja** (slika 1.7).

S obzirom na to da struja tijekom vremena mijenja svoju vrijednost i smjer, usvojeno je da se jedan smjer smatra pozitivnim, a drugi negativnim.

### Obilježja izmjenične sinusne struje i napona

Izmjeničnu sinusnu struju možemo prikazati sinusnom funkcijom (slika 1.7) gdje je kut  $\alpha$  trenutačni kut:

$$i = I_m \sin \alpha.$$

**Trenutačna vrijednost struje**  $i$  je vrijednost struje u određenom vremenskom trenutku  $t$ . Mjerna jedinica je amper (A).

**Maksimalna vrijednost struje**  $I_m$  najveća je vrijednost koju struja može postići tijekom jednog perioda. Maksimalna vrijednost naziva se još i vršna vrijednost ili amplituda. Mjerna jedinica je amper (A).

**Napomena**

Trenutačna vrijednost struje  $i$  označava se malim slovom  $i$  ili  $i(t)$  kako bi se naglasila ovisnost o vremenu.

Sukladno oznaci za izmjeničnu struju malim se slovima označavaju i ostale izmjenične veličine: izmjenični napon  $u$  ili  $u(t)$ , izmjenična elektromotorna sila  $e$  i izmjenična snaga  $p$ .

**Napomena**

Mjerna jedinica za kružnu frekvenciju je radijan po sekundi, rad/s ili kraće  $s^{-1}$ .

U nekim primjenama koristi se broj okretaja u minuti (o/min), npr. kod sinkronoga električnoga generatora.

**Napomena**

Veza među stupnjevima i radijanima:

$$\alpha (\text{rad}) : 2\pi = \alpha (^{\circ}) : 360^{\circ}.$$

Pretvaranje radijana u stupnjeve:

$$\alpha (^{\circ}) = \frac{180^{\circ}}{\pi} \alpha (\text{rad}).$$

Pretvaranje stupnjeva u radijane:

$$\alpha (\text{rad}) = \frac{\pi}{180^{\circ}} \alpha (^{\circ}).$$

**Efektivna vrijednost struje**  $I$  jednaka je onoj vrijednosti stalne istosmjerne struje pri kojoj se u nekom otporniku za vrijeme jednog perioda u toplinu pretvori jednak električni rad kao i pri promatranoj izmjeničnoj sinusnoj struji. Mjerna jedinica je amper (A).

S obzirom na to da efektivna vrijednost za sinusnu struju odgovara veličini istosmjerne struje, obilježava se velikim kosim slovom  $I$ . Veza maksimalne i efektivne vrijednosti sinusne struje dana je izrazom:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m.$$

Svi proračuni u krugu izmjenične sinusne struje provode se **efektivnim vrijednostima**.

**Period**  $T$  je vrijeme za koje izmjenična sinusna struja, koja se periodički ponavlja, obavi jedan ciklus. Mjerna jedinica perioda je sekunda (s).

**Frekvencija**  $f$  izmjenične sinusne struje je broj perioda u jednoj sekundi. Mjerna jedinica za frekvenciju je herc (Hz).

Frekvencija i period obrnuto su razmjerne veličine.

Što je frekvencija veća, vrijeme jednog perioda je kraće. Vezu frekvencije i perioda možemo izraziti:

$$T = \frac{1}{f}.$$

**Kružna frekvencija**  $\omega$  jednaka je broju prijeđenih punih kutova u sekundi. Mjerna jedinica je radijan po sekundi ( $\text{rad/s} = \text{rad s}^{-1}$ ).

Veza između kuta  $\alpha$  sinusne funkcije i vremena  $t$  (kao nezavisne varijable) slijedi iz odgovarajuće proporcionalnosti kuta  $2\pi$  i perioda  $T$  izmjenične sinusne struje:

$$t : T = \alpha : 2\pi.$$

Iz toga slijedi:

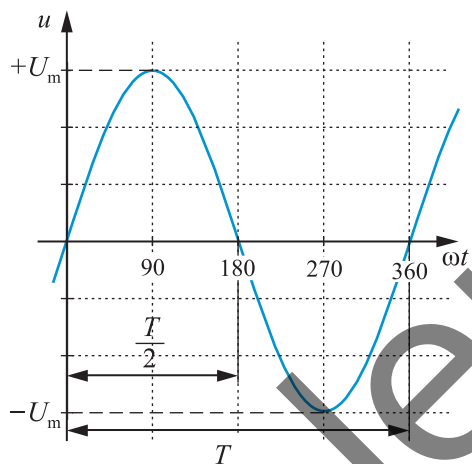
$$\alpha = \frac{2\pi t}{T} = 2\pi f t = \omega t.$$

Vezu kružne frekvencije, frekvencije i perioda možemo izraziti izrazom:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

## Napomena

Zbog usklađivanja s europskom normom EN50160, napon niskonaponske mreže u Hrvatskoj je  $U_{ef} = 230$  V i frekvenciju  $f = 50$  Hz, kao i u ostalim europskim državama. U nekim državama, kao što su SAD i Kanada, efektivni napon iznosi  $U_{ef} = 110$  V, dok je frekvencija  $f = 60$  Hz.



Slika 1.8.

Izmjenični sinusni napon

Trenutačnu vrijednost izmjenične sinusne struje možemo prikazati u obliku:

$$i = I_m \sin \omega t$$

gdje je:

- $i$  trenutačna vrijednost struje, A
- $I_m$  maksimalna vrijednost struje, A
- $t$  vrijeme, s
- $\omega$  kružna frekvencija, rad/s.

Pored efektivnih i maksimalnih veličina ponekad se u elektrotehnici upotrebljavaju i **srednje vrijednosti** izmjeničnih veličina.

Srednja vrijednost sinusne funkcije za cijeli period jednaka je nuli jer je površina jedne polovine perioda pozitivna, a druga ima jednaku vrijednost, ali je negativna.

Provedena analiza izmjenične sinusne struje vrijedi i za izmjenični sinusni napon. Slika 1.8 prikazuje izmjenični sinusni napon.

Trenutačnu vrijednost izmjeničnog sinusnog napona možemo prikazati u obliku:

$$u = U_m \sin \alpha$$

$$u = U_m \sin \omega t$$

gdje je:

- $u$  trenutačna vrijednost napona, V
- $U_m$  maksimalna vrijednost napona, V
- $t$  vrijeme, s
- $\omega$  kružna frekvencija, rad/s
- $\alpha$  kut, rad.

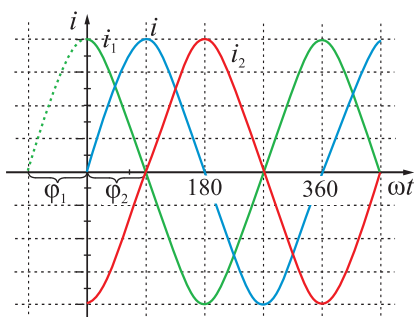
Efektivnu vrijednost napona  $U$  računamo prema izrazu:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m.$$

Naponi i struje su funkcije kuta, ali i vremena jer vrijedi:  $\alpha = \omega t$ . Za određenu frekvenciju kružna frekvencija ima stalnu vrijednost pa je kut razmjeran vremenu. Zato se pri crtanju napona ili struje može prikazati njihova ovisnost o vremenu.

### Sinusna struja s početnim faznim pomakom

U početku promatranja neke izmjenične sinusne struje ona može imati određenu početnu vrijednost koja odgovara određenom kutu  $\varphi$  sinusoide (slika 1.9).



Slika 1.9.

Sinusne struje s početnim faznim pomakom

Matematički oblik sinusne struje s početnim faznim pomakom  $\varphi$  jest:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

**Početni fazni pomak (početni kut ili fazni kut)**  $\varphi$  je kut koji sinusoida ima u trenutku  $t = 0$ . Kada početni fazni pomak ima predznak "+" u trenutku  $t = 0$ , nul-točka je pomaknuta od ishodišta ulijevo, a kada ima predznak "-" u trenutku  $t = 0$ , nul-točka je pomaknuta udesno (slika 1.9).

Matematički oblik sinusnih struja prema slici 1.9 je:

$$i = I_m \sin \omega t$$

$$i_1 = I_m \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = I_m \sin(\omega t - \varphi_2).$$

Na isti način možemo prikazati i napon s početnim faznim pomakom:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

### Primjer 1

Trenutačna vrijednost struje dana je izrazom  $i = 20 \sin\left(314t + \frac{\pi}{3}\right)$  A.

Izračunajte:

- |                                 |                         |
|---------------------------------|-------------------------|
| a) maksimalnu struju,           | d) frekvenciju,         |
| b) efektivna vrijednost struje, | e) period i             |
| c) kružnu frekvenciju,          | f) početni fazni pomak. |

### Rješenje

$$i = 20 \sin\left(314t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ A}$$

$$I_m = ?$$

$$I = ?$$

$$\omega = ?$$

$$f = ?$$

$$T = ?$$

a) Maksimalna vrijednost struje:

$$I_m = 20 \text{ A.}$$

b) Efektivna vrijednost struje:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 20 \cdot 0,707 \text{ A} \\ = 14,14 \text{ A.}$$

c) Kružna frekvencija:

$$\omega = 314 \text{ s}^{-1}.$$

d) Frekvencija:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2 \cdot 3,14} \text{ s}^{-1} = 50 \text{ Hz.}$$

e) Period:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50 \text{ Hz}} = 0,02 \text{ s} = 20 \text{ ms.}$$

f) Početni kut:

$$\varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = 60^\circ.$$

## Primjer 2

Napišite izraz za trenutačnu vrijednost izmjeničnog sinusnog napona ako je poznato:  $U = 230 \text{ V}$ ,  $T = 20 \text{ ms}$ .

## Rješenje

$$U = 230 \text{ V}$$

$$T = 20 \text{ ms} = 0,02 \text{ s}$$

$$u = ?$$

Maksimalna vrijednost napona:

$$U_m = U\sqrt{2} = 230 \cdot \sqrt{2} \text{ V} = 324,3 \text{ V.}$$

Kružna frekvencija:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3,14}{0,02} \text{ s}^{-1} = 314 \text{ s}^{-1}.$$

Trenutačna vrijednost napona:

$$u = U_m \sin \omega t$$

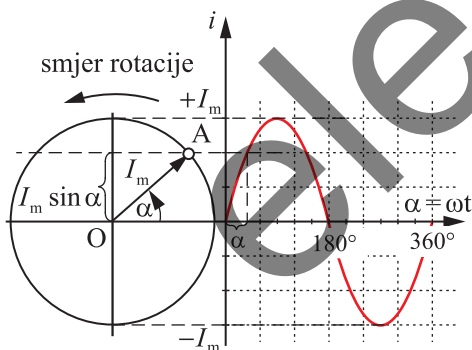
$$u = 324,3 \sin 314t \text{ V.}$$

Dobivena vrijednost odgovara naponu gradske mreže.

### 1.1.3. Predstavljanje izmjenične sinusne struje i napona s pomoću fazora

#### Predstavljanje izmjenične sinusne struje i napona s pomoću rotirajućih fazora

Sinusna funkcija može se grafički predočiti ako radijus vektor rotira jednolikom kutnom brzinom iz početnog horizontalnog položaja u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. U svakom trenutačnom položaju tog vektora njegova projekcija na vertikalnu os jednaka je sinusnu kuta što ga rotirajući vektor tvori s početnim horizontalnim položajem.



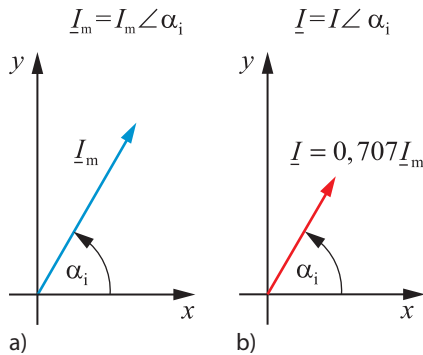
Slika 1.10.

Prikaz sinusne struje fazorom

Kako bismo na taj način prikazali izmjeničnu sinusnu struju, duljina rotirajućeg vektora, koju ćemo nazvati **fazor**, mora odgovarati maksimalnoj jakosti struje  $|OA| = I_m$  (slika 1.10).

Pretpostavimo da u ravnini (slika 1.10) oko ishodišta koordinatnog sustava rotira fazor  $|OA|$ , čija je duljina jednaka amplitudi izmjenične sinusne struje  $I_m$ , stalnom kutnom brzinom  $\omega$  u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Projekcija fazora na  $y$ -osi odgovara trenutačnoj vrijednosti struje  $i$  u odgovarajućem trenutku  $t$ . Kutna brzina rotacije fazora odgovara kružnoj frekvenciji, a početni kut fazora odgovara početnom kutu sinusoide. Trenutačni kut fazora odgovara trenutačnom kutu sinusoide, a kad se fazor jednom okrene za  $360^\circ$  ( $2\pi$  radijana), sinusoida obavi jedan period.

Dakle, sinusna struja može se prikazati s pomoću **rotirajućeg fazora**. Smjer fazora u trenutku  $t = 0$  pokazuje fazni pomak izmjenične veličine. Na isti način može se prikazati i sinusni napon.



Slika 1.11.

Fazori struje:

- a) fazor maksimalne vrijednosti struje  
b) fazor efektivne vrijednosti struje

## Napomena

Izraz  $I = I \angle \alpha_i$  znači fazor struje jednak je jakosti struje uz početni kut  $\alpha_i$ . Za napon je izraz  $U = U \angle \alpha_u$ , što znači fazor napona jednak je naponu uz početni kut  $\alpha_u$ .

## Predstavljanje izmjenične sinusne struje i napona s pomoću mirujućih fazora

Pri analizi strujnih krugova izmjenične se sinusne veličine prikazuju **mirujućim fazorom**.

**Mirujući fazor** je nepokretni vektor koji prikazuje amplitudu i fazni pomak sinusne funkcije (napona ili struje) u odnosu na os  $x$ .

**Početni fazni pomak (početni kut)** neke sinusne veličine je kut fazora  $\varphi$  u odnosu na os  $x$  (fazna os) u trenutku  $t = 0$ .

Slika 1.11 a) prikazuje fazore čija duljina odgovara maksimalnoj vrijednosti sinusne struje s početnim faznim pomakom  $\alpha_i$  u trenutku  $t = 0$ . Dijeljenjem maksimalne vrijednosti napona ili struje sa  $\sqrt{2}$  dobit će se **efektivna vrijednost** napona ili struje. Slika 1.11 b) prikazuje **fazor** čija duljina odgovara efektivnoj vrijednosti struje. Za analizu krugova izmjenične sinusne struje koriste se efektivne vrijednosti. Uбудуće ćemo redovito crtati fazore čija je duljina jednaka efektivnoj vrijednosti izmjenične sinusne struje ili napona, a kut prema osi  $x$  je početni fazni pomak u trenutku  $t = 0$ .

Fazore maksimalne ili efektivne vrijednosti sinusne struje i napona označavat ćemo simbolički velikim kosim slovom s crtom ispod:  $\underline{U}_m, \underline{I}_m, \underline{U} i \underline{I}$ . Maksimalnu i efektivnu vrijednost struje i napona označavat ćemo velikim kosim slovima:  $U_m, I_m, U i I$ . Trenutačne vrijednosti struje i napona označavat ćemo malim kosim slovima:  $u i i$ .

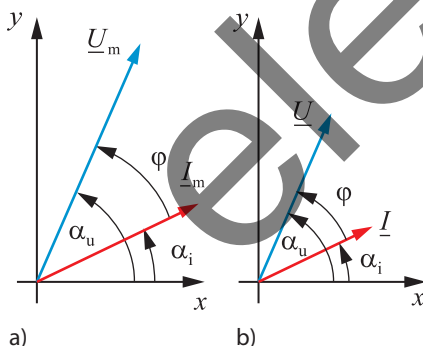
## Fazni odnosi dviju sinusnih veličina

Fazorski dijagrami koriste se pri analizi strujnih krugova gdje su izmjenični sinusni naponi i struje jednake frekvencije. Kako se svi ti fazori vrte stalnom kutnom brzinom, međusobni se položaj rotirajućih fazora tijekom vremena ne mijenja. Stoga njihov položaj u trenutku  $t = 0$  prikazujemo mirujućim fazorima, koji sadrže sve potrebne podatke: amplitude, početne faze i fazne razlike između pojedinih veličina.

Prikažimo fazni odnos napona i struje jednake frekvencije, fazno pomaknute, a zadani su sinusnom funkcijom:

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha_u)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha_i)$$



Slika 1.12.

Fazorski dijagrami napona i struje:

- a) fazor maksimalne vrijednosti i napona i struje  
b) fazor efektivne vrijednosti i napona i struje

Slika 1.12 a) prikazuje fazorski dijagram napona i struje s maksimalnim vrijednostima, a slika 1.12 b) fazorski dijagram s efektivnim vrijednostima.

Razliku početnih kutova dviju sinusnih veličina jednake frekvencije nazivamo njihovim faznim pomakom.

Ako za pozitivan smjer uzmemo smjer suprotan kazaljka na satu, tada, prema slici 1.12, fazor napona prethodi fazoru struje za kut  $\varphi$ :

$$\varphi = \alpha_u - \alpha_i$$

gdje je:

- $\varphi$  fazni pomak između napona i struje
- $\alpha_i$  početni kut struje
- $\alpha_u$  početni kut napona.

Prikazivanje sinusnih veličina fazorima omogućuje njihovo jednostavno zbrajanje ili oduzimanje na isti način kao i zbrajanje ili oduzimanje vektora.

## Pitanja za provjeru znanja

1. Što je generator?
2. Opišite postupak dobivanja izmjeničnog sinusnog napona okretanjem petlje u magnetskom polju.
3. Kako glasi izraz za trenutačnu vrijednost izmjeničnog sinusnog napona i struje?
4. Što su frekvencija i period izmjeničnog sinusnog napona i koje su im mjerne jedinice?
5. Što je kružna frekvencija i koja joj je mjerna jedinica?
6. Što je maksimalna vrijednost izmjeničnog napona ili struje?
7. Što je efektivna vrijednost izmjenične sinusne struje?
8. Napišite izraz koji povezuje maksimalnu i efektivnu vrijednost izmjenične sinusne struje ili napona.
9. Što je početni fazni pomak sinusnog napona ili struje?
10. Kako glasi izraz za trenutačnu vrijednost struje s početnim faznim pomakom  $\varphi$ ?
11. Kako se računa fazni pomak između dvaju sinusnih napona ili dviju struja?
12. Što znači da su sinusni napon i struja u fazi?
13. Što znači da su dva sinusna napona u protufazi?
14. Što je rotirajući fazor i kako se s njim prikazuje izmjenična sinusna struja ili napon u elektrotehnici?
15. Što prikazuje mirujući fazor za sinusne struje i napone?
16. Kolika je vrijednost napona i frekvencije gradske mreže koja se primjenjuje u Hrvatskoj?