Sadržaj

1. Uvod 1

1.1. Računalno modeliranje 1

1.2. Primjena numeričkih postupaka u umjetnoj inteligenciji 4

1.3. Ekosustav *Pythona* 6

2. Programski paket `numpy` 8

2.1. Podatkovna struktura `array` 8

2.2. Osnovna obilježja modula `numpy` 11

2.3. Jednodimenzijski poredak 12

2.3.1. Prevođenje liste u poredak 12

2.4. Pogreške u prikazu brojeva s pomičnom točkom 16

2.4.1. Standard IEEE 745 16

2.4.2. Pogreške zaokruživanja u prikazu brojeva s pomičnom točkom 18

2.4.3. Usporedba poredaka 23

2.5. Funkcije za stvaranje specijalnih jednodimenzijskih poredaka 28

2.5.1. Funkcija `np.linspace()` i funkcija `np.logspace()` 28

2.5.2. Funkcija `np.arange()` 30

2.5.3. Funkcije `np.ones()`, `np.zeros()`, `np.zeros_like()` i `np.ones_like()` 33

2.6. Aritmetičke operacije s 1D poredcima 34

2.6.1. Operacija s dva poretka jednake duljine i operacija skalara s poretkom 34

2.6.2. Izresci poredaka 36

2.6.3. Univerzalne funkcije modula `numpy` 37

2.7. Dvodimenzijski poredak (2D poredak) u modulu `numpy` 41

2.7.1. Oblikovanje 2D_poretka, funkcije `np.array()`, `np.reshape()` i metoda `reshape()` 41

2.7.2. Dohvat komponenti poretka, stvaranje isječaka, dohvat redova i stupaca 42
2.7.3. Transponiranje poredaka funkcijom `transpose()` ili metodom T 44
2.7.4. Funkcije `np.zeros()`, `np.ones()`, `np.identity()` i `np.eye()`, funkcije za nadovezivanje poredaka `np.hstack()` i `np.vstack()` 45
2.7.5. Uporaba funkcija modula `np.random()` za oblikovanje poredaka 47
2.7.6. Djelovanje univerzalnih funkcija, aritmetičke operacije s 2D poredcima 49
2.7.7. Sortiranje poredaka funkcijom `np.sort()` i određivanje najmanje i najveće vrijednosti funkcijama `np.min()` i `np.max()` 51

3. Vizualizacija funkcija **53**
3.1. Paket `matplotlib.pyplot` 53
3.2. Objektno orijentirana vizualizacija modulom `pyplot` 57
3.3. Formatiranje iscrtavanja i pohranjivanje slika 63
3.3.1. Crtanje više krivulja u istom crtežu, metode `set()`, `legend()` i `savefig()` 63
3.3.2. Formatiranje iscrtavanja krivulja, znakovni niz formatiranja `fmt` 65
3.3.3. Postavljanje više svojstava objekta crteža metodom `set()`, crtanje dvodimenzijskog koordinatnog sustava za pravilne geometrijske prikaze 70
3.3.4. Odabir veličine slike, atributi `xticks`, `yticks` metode `set()`, metoda `grid()` te metode `plt.axhline()` i `plt.axvline()` za crtanje koodinatnih osi 73
3.4. Ispisivanje teksta 76
3.4.1. Pisanje slobodnog teksta, metoda `text()` 76
3.4.2. Ispisivanje grčkih znakova, matematičkih simbola i izraza u stilu tipografskog jezika LaTex 78
3.5. Crtanje funkcija s polovima, crtanje asimptota 82
3.5.1. Crtanje funkcija s polovima 82
3.5.2. Maskiranje poredaka, modul `np.ma`, crtanje asimptota 86
3.6. Vizualizacija funkcija dviju varijabli 91
3.6.1. Prikaz trodimenzijskih ploha krivuljama jednakih vrijednosti 91

3.6.2. Trodimenzijski prikaz ploha 98
3.7. Prilagodba crteža obliku uobičajenom u matematičkoj literaturi . . . 102
3.7.1. Crtanje bez okvira uz uobičajene prikaze s koordinatnim osima 102

4. Numerička linearna algebra **107**
4.1. Osnovne zadaće linearne algebre 107
4.2. Matrice i vektori prikazuju se kao 2D poredci modula `numpy` 109
4.2.1. Aritmetičke operacije s matricama, matrični umnožak 109
4.2.2. Vektori i operacije s vektorima 113
4.3. Linearna algebra u euklidskom opisu ravnine i prostora 115
4.3.1. Geometrijska interpretacija vektorskih prostora $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ . . 115
4.3.2. Cramerovo pravilo za rješavanje linearnog sustava jednadžbi, složenost izračuna 120
4.3.3. Ocjena vremenske složenosti algoritama 124
4.3.4. Funkcija `det()` za računanje determinanti u modulu `scipy.linalg`, mjerenje trajanja programskih odsječaka – moduli `time` i `timeit` 127
4.4. Rješavanje sustava linearnih jednadžbi funkcijama modula `scipy.linalg` 133
4.4.1. Vlastita funkcija za LU dekompoziciju matrice A metodom Gaussove eliminacije 133
4.4.2. Poteškoće u postupku Gaussove metode eliminacije zbog konačne točnosti brojeva s pomičnom točkom i njihovo izbjegavanje pivotiranjem 137
4.4.3. LU dekompozicija matrice A funkcijama `lu()` i `lu_factor()` modula `scipy.linalg` 142
4.4.4. Rješavanje sustava linearnih jednadžbi 146
4.4.5. Rješavanje sustava linearnih jednadžbi funkcijom `solve()` modula `scipy.linalg` 150
4.4.6. Norma vektora i matrice, pouzdanost rješenja sustava jednadžbi, određivanje kondicijskog broja matrice 155
4.5. Rješavanje jednadžbi s kompleksnim brojevima 164
4.5.1. Svojstva kompleksnih brojeva 164
4.5.2. Koordinatni i polarni zapis kompleksnih brojeva 168
4.5.3. Operacije s kompleksnim vektorima i matricama 172

5. Analiza ponašanja električnih sklopova uz sinusni pobudni napon **177**

5.1. Istosmjerni i sinusni izvori energije 177

5.2. Prikaz sinusnih oblika u kompleksnoj ravnini 178

5.3. Impedancije u električnim sklopovima 182

5.3.1. Protjecanje struje kroz pasivne elemente sklopova 182

5.3.2. Struja kroz pasivne elemente sklopova sa sinusnim pobunim naponom 184

5.3.3. Struja kroz serijski spoj otpornika, induktiviteta i kapaciteta 188

5.4. Električni filtri 192

5.4.1. Niskopropusni RC filtar 192

5.4.2. Pojasnopropusni LCR filtar 196

5.5. Matrična analiza električnih sklopova 202

5.5.1. Analiza sklopova rješavanjem sustava jednadžbi 202

5.5.2. Primjeri analize rješavanjem sustava jednadžbi 204

6. Numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi **208**

6.1. Matrična analiza električnih sklopova 208

6.2. Osnove numeričkog rješavanja diferencijalnih jednadžbi 209

6.2.1. Načelo numeričkog rješavanja diferencijalnih jednadžbi . . . 209

6.2.2. Eulerov postupak, njegova točnost i stabilnost 210

6.3. Postupci Runge-Kutta 216

6.3.1. Postupci Runge-Kutta zasnovani na aproksimacijama funkcija Taylorovim redom 216

6.3.2. Stabilnost postupaka Runge-Kutta 218

6.4. Rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi 220

6.4.1. Opći oblik sustava diferencijalnih jednadžbi 220

6.4.2. Prevođenje linearne diferencijalne jednadžbe višeg reda u sustav jednadžbi prvog reda 222

6.4.3. Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori matrica 223

6.4.4. Dijagonalizacija sustava linearnih diferencijalnih jednadžbi, teško rješive jednadžbe (engl. *stiff equations*) 226

6.4.5. Implicitni postupci 229

6.4.6. Višekoračni postupci 235

6.4.7. Rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi funkcijom modula `scipy.integrate` 236

7. Neke značajnije uporabe numeričkog rješavanja diferencijalnih jednadžbi **248**

7.1. Analiza prijelaznih pojava u električnim sklopovima 248

7.1.1. Priprema za modeliranje električnih sklopova 248

7.1.2. Matematički modeli za analizu električnih sklopova 250

7.2. Usporedba analize prijelaznih pojava uporabom Laplaceove transformacije s numeričkim rješavanjem diferencijalnih jednadžbi . 261

7.2.1. Osnove Laplaceove transformacije 261

7.2.2. Laplaceova transformacija u analizi električnih sklopova . . 263

7.2.3. Usporedba s uporabom funkcije `solve_ivp()` 271

7.3. Modeliranje i analiza dinamičkih sustava, osnove teorije kaosa . . . 271

7.3.1. Jednostavni model rasta i opadanja 271

7.3.2. Nelinearna diferencijalna jednadžba logističkog rasta 276

7.3.3. Rješavanje diferencijalne jednadžbe njihala 278

7.3.4. Rješavanje diferencijalnih jednadžbi pri izučavanju determinističkog kaosa 281

8. Postupci nelinearnog optimiranja **289**

8.1. Uvod 289

8.1.1. Problem optimiranja 290

8.1.2. Određivanje minimuma funkcije 294

8.1.3. Svojstva kvadratne funkcije 299

8.2. Optimiranje funkcija jedne varijable 300

8.2.1. Postupak pronalaženja početnog unimodalnog intervala 305

8.2.2. Redukcija unimodalnog intervala 309

8.2.3. Postupak zlatnog reza 311

8.2.4. Kvadratna interpolacija 320

8.2.5. Brentov algoritam i funkcija `scipy.optimize.minimize_scalar` 327

8.2.6. Pronalaženje minimuma višemodalnih funkcija jedne varijable 330

8.3. Optimiranje funkcija više varijabli bez uporabe derivacija 332

8.3.1. Koordinatno pretraživanje 339

8.3.2. Powellov postupak konjugiranih smjerova 345

8.3.3. Hooke-Jeevesov postupak . . . 355
8.3.4. Nelder-Meadov simpleks-postupak . . . 363
8.4. Optimiranje uz uporabu gradijenta . . . 374
8.4.1. Gradijentni spust . . . 376
8.4.2. Newtonov postupak . . . 384
8.4.3. KvaziNewtonovi postupci . . . 390
8.5. Optimiranje uz ograničenja . . . 397
8.5.1. Traženje unutarnje točke . . . 403
8.5.2. Metode kazne i barijere . . . 404
8.5.3. Boxov postupak . . . 411
8.5.4. Postupci optimiranja uz ograničenja u paketu `scipy.optimize` . . . 419

Dodatci **421**
A. PRILOG A . . . 421
A.1. Instaliranje programskog okruženja Python . . . 421
A.2. Integrirano razvojno okruženje . . . 424
B. PRILOG B . . . 429
B.1. Modularna izgradnja programa . . . 429
C. PRILOG C . . . 438
C.1. Načini oblikovanja ispisnih znakovnih nizova . . . 438
C.2. Oblikovanje ispisnih znakovnih nizova f-formatiranjem . . . 440
D. PRILOG D . . . 447
D.1. Paket `control` u ekosustavu Pythona . . . 447
D.2. Opis linearnog sustava prijenosnom funkcijom ili varijablama stanja . . . 449
D.3. Povezivanje prijenosnih funkcija . . . 454
D.4. Vremenska analiza sustava . . . 458
D.5. PID regulator . . . 464

Literatura **471**

Kazalo pojmova **472**