Uvod

Brojevi su svugdje oko nas, svidjelo se to nama ili ne. Čak i za najjednostavnije, svakodnevne stvari kao što je odlazak u trgovinu trebamo brojeve da bismo znali koliko je kojih stvari u košarici i koliko artikli vrijede. Mnoge pojave oko nas mogu se brojčano prikazati, što pokazuju sljedeći primjeri:

- Koliko košta mobitel?
- Koliko smo stvari kupili u dućanu?
- Koja je veličina slike?
- Koje su koordinate točkice na zaslonu i koje je boje?
- Koliko je nešto smiješno na ljestvici od 1 do 10?
- ….

Ovdje se nećemo baviti razlogom postojanja brojeva, nego ćemo njihovu upotrebu u računalstvu pokušati demistificirati i prikazati kako mobitel, prijenosno računalo, kućno računalo ili bilo koji drugi digitalni uređaji upotrebljavaju brojeve na jednostavan i razumljiv način.

Ovaj je materijal osmišljen za sve generacije – od učenika i studenata koji tek otkrivaju STEM područje, preko nastavnika i mentora koji ih vode, pa sve do svih znatiželjnika željnih proširenja vidika i usvajanja STEM načina razmišljanja.

element.hr

Brojevni sustavi

Jeste li se ikada zapitali kako zapravo brojimo? Brojevi nisu tek znakovi na papiru, već jezik kojim opisujemo gotovo sve – od veličine svemira do svakodnevnih sitnica. Način na koji zapisujemo i tumačimo brojeve nije jednak u svim kulturama. Rezultat je višestoljetnog razvoja niza znakova i pravila za njihovo zapisivanje te se naziva brojevnim sustavom.

Potreba za brojenjem razvijala se usporedo s civilizacijom. Drevni narodi upotrebljavali su neke svoje sustave kako bi prebrojili ovce, brojili dane, pratili trgovačku razmjenu. Od jednostavnog prebacivanja kamenčića iz jedne rupe u zemlji u drugu, zarezivanja crtica na kosti, preko složenih sustava poput rimskog zapisa broja sve do arapskog zapisa broja kojim se i danas koristimo. Brojevni sustav predstavlja dogovor o tome kako ćemo učinkovito i jednoznačno izraziti bilo koju količinu. On je poveznica apstraktne ideje broja i konkretnog simbola na papiru.

Brojevne sustave dijelimo na nepozicijske brojevne sustave i pozicijske brojevne sustave.

Primjer nepozicijskog brojevnog sustava rimski je zapis broja u kojem simbol uvijek ima istu brojevnu vrijednost bez obzira na svoj položaj, npr.

$$XXX = 10 + 10 + 10 = 30.$$

Primjer pozicijskog brojevnog sustava kojim se i danas koristimo arapski je zapis broja u kojem simbol ima različitu brojevnu vrijednost, a ovisi o poziciji simbola u broju npr.

$$111 = 1 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 1 = 1 \text{ stotica} + 1 \text{ desetica} + 1 \text{ jedinica}$$

Pogledajmo primjer.

PRIMJER 1.

$$123 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

Broj 100 zapisat ćemo 10^2.

Broj 10 zapisat ćemo 10^1.

Broj 1 zapisat ćemo 10^0.

Zapamti!

$n^0 = 1$, za bilo koji n iz skupa prirodnih brojeva.

Sada naš broj zapisujemo ovako:

$$123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

U izrazu: $1 \cdot 10^2$

1 predstavlja znamenku

10 predstavlja bazu

2 predstavlja eksponent/potenciju baze, odnosno poziciju naše znamenke u zapisu broja.

Pozicije znamenaka označavaju se brojevima, počevši od 0 za krajnju desnu znamenku, a svaka sljedeća slijeva veća je za jedan. Najčešće ih zapisujemo iznad znamenaka.

Pogledajmo primjer.

PRIMJER 2.

$$\overset{2\ 1\ 0}{123} = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

Objašnjenje:

- znamenka 1 nalazi se na težinskoj poziciji 2
- znamenka 2 nalazi se na težinskoj poziciji 1
- znamenka 3 nalazi se na težinskoj poziciji 0.

Iz tog razloga kažemo da arapski zapis broja pripada pozicijskom zapisu brojeva.

element.hr

ZAKLJUČAK:

Brojevni je sustav način zapisivanja i tumačenja brojeva.
Broj je pojam koji označava količinu ili redoslijed.
Znamenka je znak kojim zapisujemo brojeve.

Najpoznatiji i najkorišteniji brojevni sustav je dekadski brojevni sustav, a zapisuje se s deset različitih znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Upravo taj broj različitih znamenaka/simbola, kojima prikazujemo broj, određuje bazu brojevnog sustava.

Baza brojevnog sustava određena je brojem različitih znamenaka koje upotrebljavamo za zapis broja.

Najmanja znamenka brojevnog sustava je 0, a **najveća znamenka** je za jedan manja od baze brojevnog sustava.

Ova jednostavna, ali vrlo učinkovita struktura omogućuje da s pomoću samo deset znamenaka zapišemo beskonačno mnogo brojeva. Dok u svakodnevici upotrebljavamo dekadski brojevni sustav (baza 10), računala i digitalna tehnologija funkcioniraju zahvaljujući drugim brojevnim sustavima, kao što su binarni, oktalni i heksadekadski.

Dekadski brojevni sustav

Skup dopuštenih znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Baza: 10

Binarni brojevni sustav

Skup dopuštenih znamenaka: 0, 1

Oktalni brojevni sustav

Skup dopuštenih znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Baza: 8

Heksadekadski brojevni sustav

Skup dozvoljenih znamenaka/simbola: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Baza: 16

U heksadekadskom brojevnom sustavu baza je 16, pa se znamenke veće od 9 označavaju slovima A, B, C, D, E i F. Tako je svaka znamenka jednoznačno određena.

element.hr

Stoga se upotrebljavaju sljedeće oznake:

jedinstvena oznaka u primjeni	vrijednost u dekadskom brojevnom sustavu
A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15
…	…

Pretvorba zapisa broja iz dekadskog brojevnog sustava u drugi brojevni sustav

Referentni brojevni sustav je onaj sustav kojim se najčešće koristimo i koji najbolje razumijemo; u našim primjerima to će biti dekadski brojevni sustav. Zapis broja iz dekadskog brojevnog sustava transformira se u zapis u nekom drugom brojevnom sustavu na način da ga cjelobrojno dijelimo (dijeljenje s ostatkom) s bazom željenog brojevnog sustava i zapisujemo ostatke cjelobrojnog dijeljenja u obrnutom poretku (od zadnjeg prema prvom), sve do trenutka u kojem je rezultat cjelobrojnog dijeljenja s novom bazom jednak nuli (0).

Algoritamski i matematički postupak možemo zapisati ovako:

Za pretvaranje dekadskog broja $N_{(10)}$ u sustav s bazom **B**, upotrebljava se algoritam uzastopnog cjelobrojnog dijeljenja dekadskog broja (i svakog sljedećeg kvocijenta) s bazom **B**.

POSTUPAK:

1) Podijelite dekadski broj **N** s novom bazom B.
2) Zabilježite ostatak. Taj ostatak postaje znamenka u novoj bazi.
3) Nastavite proces dijeleći dobiveni kvocijent s bazom B.
4) Ponavljajte korake 1 – 3 dok ne dobijete kvocijent nula.
5) Broj u novoj bazi dobiva se čitanjem ostataka u obrnutom redoslijedu (od zadnjeg do prvog).

element.hr

PRIMJER 1.

Pretvorimo zapis broja $29_{(10)}$ u binarni brojevni sustav.

cjelobrojno dijeljenje s 2	cijeli dio pri dijeljenju s 2	cjelobrojni ostatak
29 : 2 =	14	1
14 : 2 =	7	0
7 : 2 =	3	1
3 : 2 =	1	1
1 : 2 =	0	1

Rješenje: $29_{(10)} = 11101_{(2)}$.

PRIMJER 2.

Pretvorimo zapis broja $29_{(10)}$ u oktalni brojevni sustav.

cjelobrojno dijeljenje s 8	cijeli dio pri dijeljenju s 8	cjelobrojni ostatak
29 : 8 =	3	5
3 : 8 =	0	3

Rješenje: $29_{(10)} = 35_{(8)}$.

PRIMJER 3.

Pretvorimo zapis broja $29_{(10)}$ u heksadekadski brojevni sustav.

cjelobrojno dijeljenje sa 16	cijeli dio pri dijeljenju sa 16	cjelobrojni ostatak
29 : 16 =	1	13 = D
1 : 16 =	0	1

Prisjetimo se: 13 ne možemo zapisati s dvjema znamenkama u brojevnom sustavu s bazom 16. Vrijednost broja $13_{(10)}=D_{(16)}$.

Rješenje: $29_{(10)} = 1D_{(16)}$.

element.hr

PRIMJER 4.

Pretvorimo zapis broja $29_{(10)}$ u brojevni sustav s bazom 7.

cjelobrojno dijeljenje sa 7	cijeli dio pri dijeljenju sa 7	cjelobrojni ostatak	
29 : 7 =	4	1	↑
4 : 7 =	0	4	

Rješenje: $29_{(10)} = 41_{(7)}$.

Pretvorba zapisa broja iz bilo kojeg brojevnog sustava u dekadski brojevni sustav

Način pretvorbe broja iz bilo kojeg brojevnog sustava u dekadski brojevni sustav svodi se na raspisivanje po potencijama baze – gdje se svaka znamenka množi s potencijom baze koja odgovara njezinoj poziciji, a dobiveni se umnošci zbrajaju.

POSTUPAK:

1) Iznad zadanog broja zapišemo težinske pozicije znamenaka krenuvši od 0 zdesna nalijevo.
2) Zatim raspisujemo: znamenka puta baza (u kojoj je broj zapisan) na eksponent koji predstavlja težinsku poziciju znamenke, sve dok ne upotrijebimo sve znamenke broja.
3) Dobivene umnoške zbrajamo i dolazimo do zapisa broja u dekadskom brojevnom sustavu.

Pogledajmo na primjerima.

PRIMJER 1.

Pretvorimo zapis broja $11101_{(2)}$ u dekadski brojevni sustav.

$$\begin{aligned} 11101_{(2)} &= 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 \\ &= 1\cdot 16 + 1\cdot 8 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ &= 16 + 8 + 4 + 0 + 1 \\ &= 29_{(10)} \end{aligned}$$

Rješenje: $11101_{(2)} = 29_{(10)}$.

element.hr

PRIMJER 2.

Pretvorimo zapis broja $742_{(8)}$ u dekadski brojevni sustav.

$$\overset{2\ 1\ 0}{742_{(8)}} = 7 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0$$
$$= 7 \cdot 64 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 1$$
$$= 448 + 32 + 2$$
$$= 482_{(10)}$$

Rješenje: $742_{(8)} = 482_{(10)}$.

PRIMJER 3.

Pretvorimo zapis broja $1A4E_{(16)}$ u dekadski brojevni sustav.

$$\overset{3\ 2\ 1\ 0}{1A4E_{(16)}} = 1 \cdot 16^3 + A \cdot 16^2 + 4 \cdot 16^1 + E \cdot 16^0$$
$$= 1 \cdot 4096 + 10 \cdot 256 + 4 \cdot 16 + 14 \cdot 1$$
$$= 4096 + 2560 + 64 + 14$$
$$= 6734_{(10)}$$

Rješenje: $1A4E_{(16)} = 6734_{(10)}$.

PRIMJER 4.

Pretvorimo zapis broja $3302_{(4)}$ u dekadski brojevni sustav.

$$\overset{3\ 2\ 1\ 0}{3302_{(4)}} = 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0$$
$$= 3 \cdot 64 + 3 \cdot 16 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1$$
$$= 192 + 48 + 0 + 2$$
$$= 242_{(10)}$$

Rješenje: $3302_{(4)} = 242_{(10)}$.

element.hr

Pretvorbe zapisa brojeva između različitih brojevnih sustava

Želimo li zapis broja iz brojevnog sustava A pretvoriti u odgovarajući zapis broja u brojevnom sustavu B, tada prvo broj iz brojevnog sustava A pretvaramo u odgovarajući broj u dekadskom brojevnom sustavu, a potom dobiveni rezultat iz dekadskog brojevnog sustava pretvaramo u odgovarajući zapis broja u bazi B. Ti su postupci opisani u prethodnim poglavljima.

Pretvorba između brojevnih sustava upotrebom dekadskog brojevnog sustava kao posrednika

Pogledajmo na konkretnim primjerima.

PRIMJER 1.

Pretvorimo zapis broja $3302_{(4)}$ u brojevni sustav s bazom 8.

Pretvorba broja iz brojevnog sustava s bazom 4 u dekadski brojevni sustav:

$$\overset{3\,2\,1\,0}{3302_{(4)}} = 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0$$
$$= 3 \cdot 64 + 3 \cdot 16 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1$$
$$= 192 + 48 + 0 + 2$$
$$= 242_{(10)}$$

Pretvorba dekadskog zapisa broja u brojevni sustav s bazom 8.

cjelobrojno dijeljenje s 8	cijeli dio pri dijeljenju s 8	cjelobrojni ostatak	
242 : 8 =	30	2	↑
30 : 8 =	3	6	
3 : 8 =	0	3	

Rješenje: $3302_{(4)} = 362_{(8)}$.

Određivanje nepoznate baze

Drugi tip zadataka vezanih za ovo područje odnosi se na određivanje nepoznate baze. Kod ovog tipa zadataka također se upotrebljava pretvorba zapisa broja u dekadski brojevni sustav za broj čija je baza poznata. Za zapis broja čija je baza nepoznata koristimo se pozicijskim zapisom, odnosno težinskim vrijednostima znamenaka s nepoznatom bazom. Takvi zadatci svode se na rješavanje linearne ili kvadratne jednadžbe, ovisno o broju znamenaka broja čija je baza nepoznata.

element.hr

Pogledajmo na primjerima.

PRIMJER 1.

Zadana je jednadžba $110011_{(2)} = 63_{(x)}$.

Potrebno je odrediti nepoznatu bazu *x*.

Ovaj tip zadataka rješava se na način da se broj koji ima poznatu bazu transformira u dekadski, a broj koji ima nepoznatu bazu raspiše u obliku polinoma u kojem su znamenke koeficijenti uz odgovarajući eksponent baze. Eksponent baze težinska je vrijednost znamenke, a budući da baza nije poznata, upotrebljavamo slovo kojim označavamo nepoznatu bazu.

$$\overset{5\,4\,3\,2\,1\,0}{110011_{(2)}} = \overset{1\,0}{63_{(x)}}$$

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 6 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0$$

$$1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6 \cdot x + 3 \cdot 1$$

$$32 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1 = 6 \cdot x + 3$$

$$51 = 6 \cdot x + 3$$

$$51 - 3 = 6 \cdot x$$

$$48 = 6 \cdot x$$

$$6 \cdot x = 48$$

$$x = 8$$

Rješenje: Nepoznata baza ima vrijednost 8.

Provjera:

$$\begin{aligned} \overset{1\,0}{63_{(8)}} &= 6 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 \\ &= 6 \cdot 8 + 3 \cdot 1 \\ &= 48 + 3 \\ &= 51_{(10)} \end{aligned}$$

element.hr

Ovakav se tip zadatka vrlo često svodi na kvadratnu jednadžbu.

Opći oblik kvadratne jednadžbe je:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe dobivaju se uvrštavanjem koeficijenata *a*, *b* i *c* u formulu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

PRIMJER 2.

Odredimo bazu x iz zadane jednadžbe: $1110011_{(2)} = 163_{(x)}$.

Zapis broja s poznatom bazom pretvara se u dekadski brojevni sustav kao što smo već prije pokazali.

Broj s nepoznatom bazom raspisuje se u obliku polinoma u kojem su znamenke koeficijenti uz odgovarajući eksponent baze, eksponent baze je težinska vrijednost znamenke, a budući da baza nije poznata, upotrebljavamo slovo kojim označavamo nepoznatu bazu.

$$\overset{6\,5\,4\,3\,2\,1\,0}{1110011_{(2)}} = \overset{2\,1\,0}{163_{(x)}}$$

$$1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot x^2 + 6 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0$$

$$1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot x^2 + 6 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0$$

$$64 + 32 + 16 + 2 + 1 = x^2 + 6x + 3$$

$$115 = x^2 + 6x + 3$$

U ovom trenutku dobivenu jednakost trebamo svesti na oblik kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x^2 + 6x + 3 - 115 = 0$$

$$x^2 + 6x - 112 = 0$$

Uspoređivanjem koeficijenata iz dobivene jednadžbe s općim oblikom kvadratne jednadžbe određujemo koeficijente a, b i c.

$$a = 1$$
$$b = 6$$
$$c = -112$$

Kako bismo odredili bazu brojevnog sustava, koeficijente uvrštavamo u formulu s pomoću koje dobivamo rješenja kvadratne jednadžbe:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

i na taj način dobivamo dva rješenja: $x_1 = 8$ i $x_2 = -14$.

Uočavamo da je jedno rješenje negativan broj i njega zanemarujemo jer baza brojevnog sustava ne može biti negativna. Stoga preostaje drugo rješenje koje iznosi 8.

Rješenje: $x = 8$.

element.hr

Određivanje najmanje moguće baze

Treća inačica ovog tipa zadataka jest rješavanje jednadžbe u kojoj su zadana dva zapisa broja čije baze nisu poznate. U ovom tipu zadatka postoji beskonačno mnogo rješenja, pa se traže ili minimalne baze ili baze koje zadovoljavaju određeni uvjet. Postoji li u zadatku određeni uvjet koje baze moraju zadovoljavati, tada se taj uvjet uvrsti umjesto jedne baze i problem se svede na rješavanje kvadratne jednadžbe ili pak u drugom slučaju, kada se traže minimalne baze koje zadovoljavaju jednadžbu, treba odrediti najmanju bazu s obzirom na znamenke broja koji je zadan.

Pogledajmo na primjerima.

PRIMJER 1.

Potrebno je odrediti minimalne baze iz sljedećeg izraza: $442_{(x)} = 172_{(y)}$.

Pogledamo li lijevu stranu jednadžbe, možemo uočiti da je najveća znamenka 4, a to znači da je 5 minimalna vrijednost baze brojevnog sustava koju upotrebljavamo za zapis broja 442. Uvrstimo 5 umjesto baze x i raspišimo jednadžbu:

$$\overset{2\,1\,0}{442_{(x)}} = \overset{2\,1\,0}{172_{(y)}}$$

$$4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 1 \cdot y^2 + 7 \cdot y^1 + 2 \cdot y^0$$

$$100 + 20 + 2 = y^2 + 7y + 2$$

$$y^2 + 7y - 120 = 0.$$

Odredimo koeficijente kvadratne jednadžbe:

$$a = 1,\ b = 7,\ c = -120.$$

Dobivene vrijednosti uvrštavamo u formulu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

s pomoću koje dobivamo rješenja kvadratne jednadžbe i na taj način dobivamo: $y_1 = 8,\ y_2 = -15$.

Negativno rješenje odbacujemo, a za pozitivno rješenje provjeravamo može li biti baza brojevnog sustava za zapis broja $172_{(y)}$. U ovom slučaju baza 8 odgovara jer je u zapisu broja upotrijebljena najveća znamenka 7.

Pa nam je rješenje $x = 5$ i $y = 8$.

Rješenje: $x = 5,\ y = 8$.

element.hr

Ako nam nijedno rješenje kvadratne jednadžbe ne odgovara, postupak bismo ponovili tako da početnom zapisu broja s lijeve strane pretpostavljenu bazu povećamo za jedan, a ostale postupke ponovimo. I tako sve dok ne pronađemo odgovarajuće baze.

PRIMJER 2.

Zadana je jednadžba $330_{(x)} = 140_{(y)}$ uz uvjet da je y uvijek za 2 veći od x. Odredimo minimalne baze brojevnih sustava za koje vrijedi jednakost.

Najprije treba uočiti zadani odnos baza: $y = x + 2$.

Potom provodimo supstituciju: umjesto y uvrštavamo $x + 2$ i raspišemo jednakost na način koji smo do sada već opisivali.

$$\overset{2\,1\,0}{330_{(x)}} = \overset{2\,1\,0}{140_{(y)}}$$

$$3x^2 + 3x^1 + 0x^0 = 1y^2 + 4y^1 + 0y^0$$

$$3x^2 + 3x = (x + 2)^2 + 4 \cdot (x + 2)$$

$$3x^2 + 3x = x^2 + 4x + 4 + 4x + 8$$

$$2x^2 - 5x - 12 = 0$$

Rješavanje problema sveli smo na rješavanje kvadratne jednadžbe.

Odredimo koeficijente jednadžbe: $a = 2$, $b = -5$ i $c = -12$.

Uvrstimo ih u formulu za određivanje nepoznanica u kvadratnoj jednadžbi.

Dobivamo rješenja kvadratne jednadžbe: $x_1 = 4$ i $x_2 = -1{,}5$.

Baza brojevnog sustava je prirodan broj veći od 1. Stoga zaključujemo da je $x = 4$.

Uvrštavanjem te vrijednosti u $y = x + 2$ dobivamo $y = 6$.

Rješenje: $x = 4$, $y = 6$.

element.hr

Binarni brojevni sustav u računalstvu

Svi uređaji oko nas mogu se podijeliti u dvije kategorije ovisno o tome kakvim se signalima koriste za upravljanje i rad. Ugrubo se signali mogu podijeliti na analogne i digitalne.

Analogni signali kontinuirano se mijenjaju, oblici tih signala su takvi da nemaju prekida i oštrih prijelaza i uglavnom su zakrivljeni. Tipičan primjer analognog signala je matematička funkcija sinus, a takav oblik ima i napon gradske mreže.